Kunfalvi Rezső Olimpiai Válogatóverseny, 1. forduló, elméleti rész

2017. április 10.

Fontos tudnivalók

- Az elméleti forduló *időtartama 5 óra.* A feladatok hibátlan megoldásával *összesen 450 pontot* lehet szerezni, a részpontszámok az egyes kérdések után zárójelben fel vannak tüntetve. Figyelem! Az összes feladathoz egyetlen, közös adattáblázat tartozik, ami a feladatokban szereplő konstansokat, fizikai állandókat tartalmazza (lásd a lap alját).
- A részletes számolásokat a rendelkezésre álló fehér lapokon végezd! Az egyéb (füzetből kitépett, négyzetrácsos stb.) lapra írt megoldásokat nem tudjuk értékelni. Lehetőleg minél kevesebb szöveget használj, megoldásaidat igyekezz főleg egyenletekkel, számokkal, szimbólumokkal és grafikonokkal kifejezni! Ha azt szeretnéd, hogy megoldásod egy része ne kerüljön értékelésre, tedd zárójelbe azt a részt, és egy vonallal húzd át! (Az áthúzott, de helyes megoldást nem tudjuk értékelni.)
- Minden lapra írd rá a nevedet! Ügyelj rá, hogy *minden feladat megoldása külön lapra kerüljön*, mert a különböző feladatokat más-más javító fogja értékelni.
- Végeredményeidet a feladatokhoz tartozó válaszlap megfelelő mezőjébe is írd be! *Mindenképp szakíts időt a válaszlap kitöltésére!* Azon feladatokhoz tartozó mezőket, amelyekkel érdemben nem foglalkoztál, hagyd üresen!
- *A verseny teljesen egyéni.* A feladatok megoldásához író- és rajzeszközökön, valamint kétsoros (nem grafikus) számológépen kívül semmilyen segédeszköz (könyv, füzet, internet, számítógép, mobiltelefon stb.) nem használható.

Fizikai állandók táblázata

fénysebesség:	$c=3{,}00\cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$,	gravitációs állandó:	$G=6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}$,
Boltzmann-állandó:	$k_\mathrm{B}=1{,}38\cdot 10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$,	univerzális gázállandó:	$R=8{,}31\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}\cdot\mathrm{mol}}$,
Avogadro-szám:	$N_\mathrm{A}=6{,}02\cdot 10^{23}\,\frac{1}{\mathrm{mol}}$,	Planck-állandó:	$h=6{,}63\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$,
elemi töltés:	$e=1{,}60\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$,	elektron tömege:	$m_\mathrm{e}=9{,}11\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$,
vákuum permittivitása:	$\varepsilon_0=8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}$,	vákuum permeabilitása:	$\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{T}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{A}}$.
Stefan–Boltzmann állandó:	$\sigma=5{,}67\cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\mathrm{K}^4}$,	Nap sugara:	$R_\odot=6{,}96\cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$
Nap felszíni hőmérséklete:	$T_\odot=5780\,\mathrm{K}$,	Nap tömege:	$M_\odot=1{,}99\cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$

1. Poynting–Robertson-effektus (150 pont)

A Nap körül keringő égitestek mozgására elhanyagolható hatást fejt ki a Nap sugárnyomása. Azonban igen kis méretű porszemek esetén a sugárnyomás hatása jelentőssé, bizonyos esetben a gravitációs vonzásnál is jelentősebbé válik. Ebben a feladatban ezt a jelenséget tanulmányozzuk, amelyet felfedezőik tiszteletére *Poynting–Robertson-effektusnak* neveznek.

1.1. Elszökő porszemek (15 pont)

Igen kicsiny porszemeket a Nap sugárnyomása egyszerűen „elfúj” a Naptól; ezek a részecskék nem tudnak kötött ellipszis pályára állni.

a) Határozd meg annak a minimális méretű porszemnek a d_0 átmérőjét, amely még képes kötött pályán keringeni a Nap körül! A porszem sűrűségét jelölje ρ! A porszemet és a Napot tekintsd gömb alakú, abszolút fekete testnek! Eredményedet szimbolikusan, a Nap adataival, valamint univerzális állandókkal add meg! (Használd a közös táblázatban levő jelöléseket!) (10 pont)

b) A sűrűség $\rho = 1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ értéke mellett add meg d_0 számértékét! (A szükséges adatokat a közös táblázatból keresd ki!) (5 pont)

1.2. Fékeződő porszemek (20 pont)

Az előző feladatban kiszámolt d_0 méretnél nagyobb porszemek képesek a Nap körül kötött pályán keringeni, azonban az ő mozgásukat is befolyásolja a sugárnyomás. Az effektus könnyen megérthető a porszem koordináta-rendszeréből; a porszem pálya menti sebessége miatt a Napból érkező sugárzás mindig kicsit „szemből” éri a porszemet, és ezért fékezi.

c) Magyarázd meg *kvalitatíven* a jelenséget a *Naphoz rögzített* koordináta-rendszerben, feltételezve, hogy a porszem körpályán kering! (Képleteket nem is kell írnod, de rá kell mutatni a fékező hatás okára.) (10 pont)

d) Tegyük fel, hogy a $d \gg d_0$ átmérőjű, m tömegű porszem a Naptól R távolságban éppen érintő irányban halad v sebességgel, és $v \ll c$. Határozd meg a sugárzással való kölcsönhatásból származó fékező erő érintő irányú (sebességgel ellentétes) $K(R, v)$ komponensét! (Eredményedet R, v függvényében, és a Nap illetve porszem többi ismert paramétereinek segítségével add meg!) (10 pont)

Útmutatás: A jelenség egzakt kezeléséhez relativisztikus formulákra lenne szükség. Azonban $v \ll c$ esetén helyes eredmény adódik abból az egyszerű képből, hogy:

i) a sugárzást a Napból kiinduló fotonoknak tekintjük, amelyek c sebességgel haladnak és energiájukat, impulzusukat a fotonokra vonatkozó jól ismert formulák írják le.

ii) a relatív sebesség számolásakor a klasszikus (nem relativisztikus) formulát alkalmazzuk.

iii) figyelembe vesszük, hogy $v \ll c$.

1.3. A porszemek Napba zuhanása (70 pont)

A keringő porszemekre ható fékező erő igen kicsiny, azonban hosszú távon ahhoz vezet, hogy a porszem mechanikai energiája, impulzusmomentuma fokozatosan csökken, és a porszem spirális pályán a Napba zuhan. Tekintsük a fékező erőt kis perturbációnak, és vizsgáljuk meg, hogyan módosítja ez a hatás egy eredetileg körpályán keringő részecske mozgását!

e) Tegyük fel, hogy az m tömegű porszem „kikapcsolt” sugárzás mellett R sugarú körpályán kering állandó v sebességgel. Legyen E a porszem teljes mechanikai energiája, N pedig impulzusmomentuma! Határozd meg a $v(R)$, $E(R)$, $N(R)$ függvényeket! (A kifejezésekben szerepelhetnek a tömegek és univerzális állandók is.) (15 pont)

Most „bekapcsoljuk" a napsugárzást. Feltesszük, hogy $d \gg d_0$, így a porszemre radiális irányban ható sugárnyomás elhanyagolható a gravitációs vonzás mellett. A K fékező erő hatására részecske R pályasugara lassan csökkenni kezd.

f) Feltételezve, hogy a porszem sebességének sugárirányú komponense jóval kisebb az érintőirányú komponensénél, valamint feltételezve, hogy a pálya mindvégig kör marad, írd föl az $R(t)$ függvényt meghatározó differenciálegyenletet! (A körpályára vonatkozó feltevést később, az 1.4 részben igazoljuk.) (25 pont)

g) Oldd meg az előző pontban kapott differenciálegyenletet az $R(0) = R_0$ kezdeti feltétel mellett! (20 pont)

h) Nő vagy csökken a porszem kerületi sebessége a fékező erő hatására? (Válaszodat indokold!) (10 pont)

1.4. Körpálya? (35 pont)

A levezetés során feltettük, hogy a porszem mindvégig körpályán kering. Most ennek a feltevésnek a helyességét ellenőrizzük.

i) Az **e)** pontban kiszámolt eredmények birtokában add meg az E mechanikai energiának és N impulzusmomentumnak egy olyan $p(E, N)$ polinomját, amely körmozgás esetén zérus! (A polinomban a pálya más adatai nem szerepelhetnek!) (10 pont)

Megmutatható, hogy a $p(E, N)$ polinom *pontosan akkor* zérus, ha az E, N mozgásállandókhoz tartozó pálya kör alakú. Ezt a tényt a továbbiakban bizonyítás nélkül felhasználhatod.

j) Határozd meg az energia illetve az impulzusmomentum $\mathrm{d}E$ illetve $\mathrm{d}N$ megváltozását, ha a (körpályán keringő) porszemre rövid $\mathrm{d}t$ ideig állandó K fékező erő hat! (Eredményedben szerepelhet az R pályasugár és a v keringési sebesség.) (15 pont)

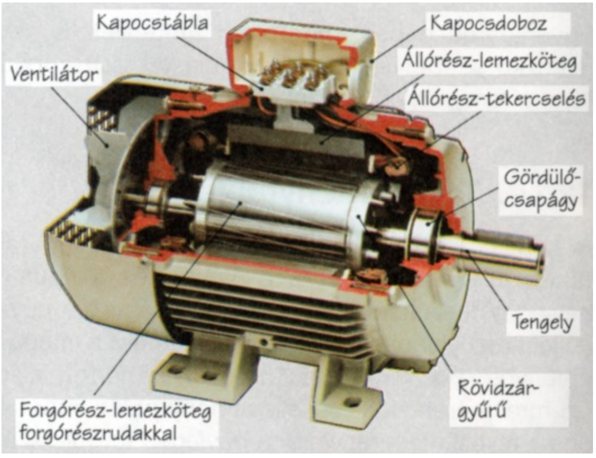
k) Az előző eredmények felhasználásával add meg az **i)** kérdésben felírt polinom $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(E, N)$ idő szerinti deriváltját! Eredményed birtokában igazold, hogy a pálya valóban kör alakú marad! (10 pont)

1.5. Porszemek hőmérséklete (10 pont)

l) Határozd meg a Naptól R távolságban levő porszem $T(R)$ hőmérsékletét! (Tekintsd mind a Napot, mind a porszemet abszolút fekete testnek!) (10 pont)

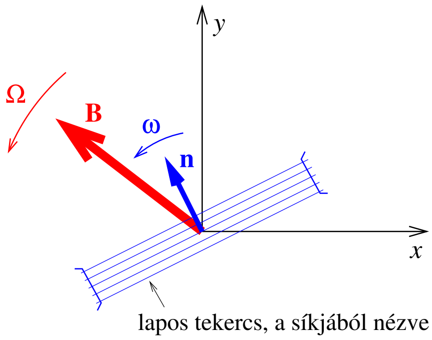
2. Indukciós motor (150 pont)

Az indukciós (vagy aszinkron) motorok a legegyszerűbb és egyben legmegbízhatóbb elektromos motorok. Váltakozó áramú meghajtást igényelnek, és nem tartalmaznak csúszógyűrűket, szénkeféket. *Állórészből* és *forgórészből* állnak (1. ábra). Az állórész rögzített tekercsek rendszere, amely a motor tengelyére merőleges síkban forgó mágneses teret hoz létre. A forgórész egy egyszerű „kalicka", azaz néhány zárt fémhurok a motor tengelyéhez erősítve. Az állórész által keltett forgó mágneses tér elektromos áramot indukál a forgórészben, ami ezáltal mágneses dipólusként viselkedik, és kölcsönhatásba lép az állórész mágneses terével. Ennek következtében forgatónyomaték hat a forgórészre, és az elkezd forogni.



1. ábra. Az indukciós motor szerkezete.

A 2. ábrán szemléltetett, egyszerűsített modellben az állórész által keltett $\boldsymbol{B}$ mágneses indukció az $x - y$ síkban egyenletes Ω szögsebességgel forog. A forgórész tengelye a koordinátarendszer z tengelyével esik egybe. Tekintsük a forgórészt egy lapos tekercsnek, melynek keresztmetszete A, menetszáma N, ohmos ellenállása R, önindukciós együtthatója pedig L. A tekercs síkjára merőleges $\boldsymbol{n}$ egységvektor szintén az $x - y$ síkban forog.



2. ábra. Az egyszerűsített modell, a z tengely irányából nézve.

2.1. Stacionárius üzemmód (80 pont)

Először a stacionárius üzemmódot tanulmányozzuk, amikor a motor ω szögsebessége és T forgatónyomatéka[1] állandó. Látjuk majd, hogy ha a motor terhelve van, akkor a forgórész ω szögsebessége kisebb, mint Ω. Ezt az elcsúszást az

$$s = \frac{\Omega - \omega}{\Omega}$$

mennyiséggel, az úgynevezett *szlippel* jellemezzük, amely egy 0 és 1 közötti, dimenzió nélküli szám.

[1] A jelölés az angol *torque* szóból származik.

Stacionárius üzemmód kis terhelés mellett

a) Tegyük fel, hogy a motor terhelése kicsiny, tehát a szlip $s \ll 1$. Ekkor a forgórész önindukciója elhanyagolható. Határozd meg a motor által kifejtett forgatónyomaték T időátlagát, mint az s szlip függvényét! (10 pont)

Stacionárius üzemmód tetszőleges terhelés mellett

b) Határozd meg a T átlagos forgatónyomatékot az s szlip függvényében tetszőleges 0 és 1 közti s szlip esetén! (40 pont)

c) Tegyük fel, hogy az $\frac{L\Omega}{R}$ mennyiség 10 körüli értéket vesz fel. Vázold a $T(s)$ függvény grafikonját! (15 pont)

d) Határozd meg stacionárius üzemben a forgatónyomaték $T_{\max}$ legnagyobb értékét, valamint a hozzá tartozó s_0 szlip értéket! (15 pont)

2.2. Hatásfok (40 pont)

e) Határozd meg a motor η hatásfokát az s szlip függvényében! (Tegyük fel, hogy a súrlódásból, elektromágneses sugárzásból adódó veszteségek elhanyagolhatóak.) (40 pont)

2.3. Stabilitás (15 pont)

f) Tegyük fel, hogy az indukciós motort egy olyan berendezéshez kapcsoljuk, amelynek lineáris $T_l(\omega)$ karakterisztikája van, azaz az állandó ω szögsebesség fenntartásához $T_l(\omega) = K\omega$ forgatónyomaték szükséges, ahol K pozitív konstans. Határozd meg *grafikusan* a motor stabil és instabil működéséhez tartozó pontokat a **c)** kérdésben kapott $T(s)$ grafikonon különböző K értékek mellett! (15 pont)

2.4. Negatív szlip (15 pont)

g) Van-e fizikai jelentése a negatív szlip értékeknek? Ha igen, mi? Ha nem, miért nem? (15 pont)

3. Luneburg-lencse (150 pont)

Ha kíváncsiak vagyunk arra, hogy milyen egy, az $\boldsymbol{r}$ helyvektortól függő $n(\boldsymbol{r})$ törésmutatójú közegben haladó fénysugár pályája, általánosan a *Fermat-elv*et hívjuk segítségül. Az elv szerint egy optikai közeg két, A és B pontja között a fénysugár olyan útvonalon halad, amelyet a legrövidebb idő alatt tesz meg. Másképpen fogalmazva, azt a pályát követi, melyre az

$$\int_A^B n(\boldsymbol{r})\mathrm{d}s$$

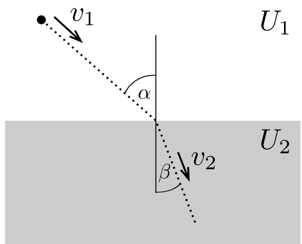
kifejezésnek szélsőértéke van ($\mathrm{d}s$ a pálya elemi ívhossza). Ezt az integrált optikai úthossznak nevezik. Ebből levezethető a Snellius–Descartes-törvény, miszerint a fénysugár egy n_1 és egy n_2 törésmutatójú közeg határához érve úgy törik meg, hogy teljesüljön az

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$$

egyenlet, ahol α a beesési szög az n_1 törésmutatójú közegben, β pedig a törési szög az n_2 törésmutatójú közegben.

Ha ismerjük az $n(\boldsymbol{r})$ függvényt, akkor elvben kiszámíthatjuk a fénysugár pályáját. Azonban ez az út sokszor felsőbb matematikai ismereteket igényel, viszont alkalmas mechanikai analógiával könnyebben célhoz érhetünk. Ebben a feladatban a helytől függő törésmutatójú közegekben terjedő fénysugarakkal foglalkozunk.

a) Tekintsünk egy pontszerű részecskét, ami a 3. ábrán látható, vízszintes, súrlódásmentes síkban halad. A részecske potenciális energiája és sebessége a felső félsíkban rendre U_1, v_1, az alsó félsíkban U_2, v_2. A részecske áthalad a két félsíkot elválasztó egyenesen az ábrán látható módon. Vezess le egy összefüggést v_1, v_2, α és β között! (5 pont)



3. ábra. Egy pontszerű részecske mozgása.

b) Az előző feladat eredménye alapján add meg a Fermat-elv mechanikában érvényes alakját! (5 pont)

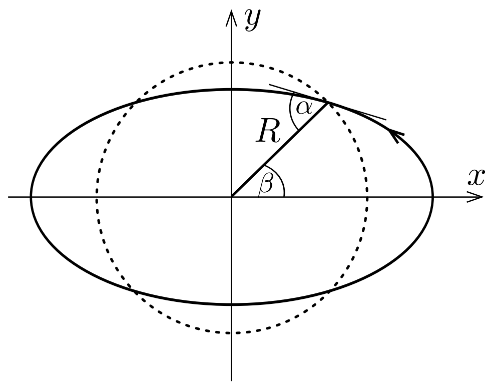
A továbbiakban használjuk fel ezt a mechanikai analógiát, és tekintsünk egy olyan közeget, melynek törésmutatója csak az origótól mért r távolságtól függ, azaz $n(\boldsymbol{r}) = n(r)$.

c) Egy bizonyos közegben bármely fénysugár pályája olyan ellipszis, melyek egyik *fókusza* az origó. A törésmutató értéke az origótól R távolságra $n(R) = n_0\sqrt{2}$, és $R/2$ távolságra pedig $n(R/2) = n_0\sqrt{3}$. Add meg $n(r)$ alakját n_0, R és r segítségével! (20 pont)

d) Egy másik közegben a fénysugarak pályái ismét ellipszisek, de most az ellipszisek *középpontja* az origó. A törésmutató értéke az origóban $n(0) = n_0\sqrt{2}$, illetve az origótól R távolságra $n(R) = n_0$. Add meg $n(r)$ alakját n_0, R és r segítségével! (20 pont)

e) Foglalkozzunk a **d)** feladatban leírt közeggel. A 4. ábrán látható fénysugár ellipszis pályája a következőképpen paraméterezhető: (30 pont)

$$x(\xi) = a\cos\xi,$$
$$y(\xi) = b\sin\xi,$$

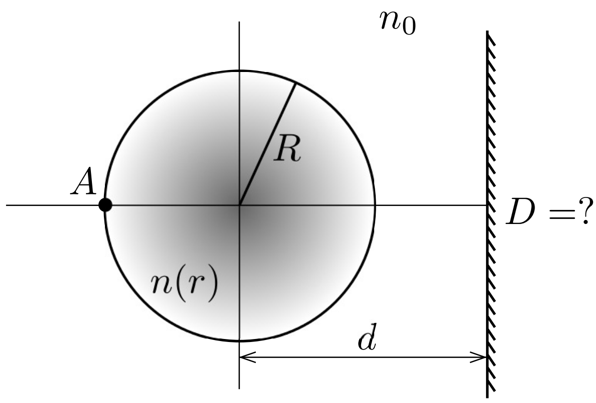


4. ábra. Az origó középpontú ellipszisen haladó fénysugár. A szaggatott kör az origótól mért R távolságot jelöli. Az α szög a sugár és az adott pontbeli érintő közötti szöget mutatja.

ahol $\xi \in [0, 2\pi]$, a és b pedig az ellipszis nagy és kis féltengelye. Mely ξ értékekre lesz a fénysugár R távolságra az origótól?

f) A 4. ábrán látható α és β szögek közötti összefüggés: $\alpha = K\beta$. A mechanikai analógia segítségével határozd meg K értékét! (30 pont)

A **d)** feladatbeli közeget úgy változtatjuk meg, hogy $r > R$ értékekre $n(r) = n_0$ (és $r \leq R$ esetén a törésmutató változatlan). Ekkor egy úgynevezett *Luneburg-lencsét* kapunk. A lencsének az 5. ábrán jelölt A pontjába egy pontszerű, minden irányba egyenletesen sugárzó, P teljesítményű fényforrást, a lencse fényforrással átellenes oldalára, a lencse középpontjától $d > R$ távolságra pedig egy ernyőt helyezünk el.



5. ábra. A Luneburg-lencse az A pontjában levő fényforrással és ernyővel.

g) Mekkora az ernyőn keletkező fényfolt D átmérője? (20 pont)

h) Add meg az ernyőn mérhető intenzitást a folt közepétől mért távolság függvényében! (20 pont)