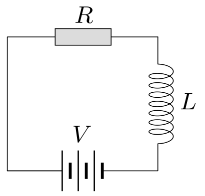
T1: Úszó henger (10 pont)

Egy szilárd, homogén $h = 10$ cm magas és $s = 100$ cm^2 alapterületű henger úszik egy $H = 20$ cm magas és $S = 102$ cm^2 alapterületű, folyadékkal töltött hengeres edényben. A henger és a folyadék sűrűségének hányadosa $\gamma = 0.70$. A henger alja néhány centiméterrel az edény alja felett van. A henger függőleges rezgéseket végez, miközben tengelye mindvégig egybeesik az edény tengelyével. A folyadék felszínének rezgési amplitúdója $A = 1$ mm.

Határozd meg a mozgás T periódusidejét! A folyadék viszkozitását hanyagold el.

T2: Hőtani rezgések (10 pont)

Egy ellenállás olyan anyagból készült, amelynek van egy fázisátalakulása olyan módon, hogy az ellenállása a következő két érték valamelyike:: R_1, ha a hőmérséklete kisebb, mint T_c, és $R_2 > R_1$, ha a hőmérséklete nagyobb, mint T_c.



Ezt az ellenállást egy L induktivitású tekercsen keresztül egy feszültségforrásra kötjük. Azt látjuk, hogy ha a forrás V feszültsége két kritikus érték közé esik, $V_1 < V < V_2$, akkor az ellenállás hőmérséklete oszcillálni kezd. Tegyük fel, hogy (i) az ellenállásból a környezetbe jutó P hőáramot a $P = \alpha(T - T_0)$ kifejezés adja meg, ahol α egy állandó, T az ellenállás hőmérséklete, T_0 pedig a környezet hőmérséklete; (ii) az ellenállás geometriai mérete olyan kicsi, hogy sokkal gyorsabban eléri a termikus egyensúlyt, mint az L/R_2 karakterisztikus idő.

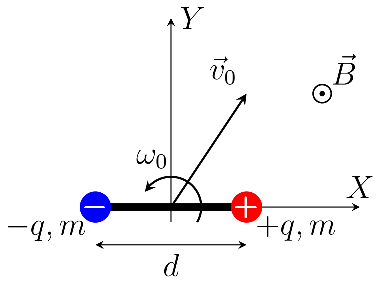
(a) *(2 pont)* Fejezd ki V_1 és V_2 értékét a fent megadott paraméterek segítségével!

(b) *(6 pont)* Feltételezve, hogy $V_1 < V < V_2$, vázold fel az ellenállás T hőmérsékletét a t idő függvényében, és határozd meg a $(T_{\max} - T_0)/(T_{\min} - T_0)$ hányadost, ahol $T_{\max}$ és $T_{\min}$ a T hőmérséklet maximális és minimális értékét jelöli!

(c) *(2 pont)* Határozd meg az oszcilláció periódusidejét, ha $V = \sqrt{V_1 V_2}$ és $R_2 = 16 R_1$!

T3: Dipólus mágneses mezőben (10 pont)

Két kicsiny, egyenként m tömegű, rendre $+q$ és $-q$ töltéssel rendelkező golyót egy d hosszúságú, merev rúddal összekötünk, és így egy dipólust kapunk. A dipólus az XY-síkban helyezkedik el, és az XY-síkra merőleges irányú, homogén $\vec{B}$ mágneses térben van.



Kezdetben a dipólus az X tengely mentén helyezkedik el, és ω_0 kezdeti szögsebességgel forog az XY-síkban az ábrán látható módon. A tömegközéppontja kezdetben az origóban van, kezdeti sebessége $\vec{v}_0$, ami szintén az XY-síkban van.

Tekintsünk három különböző esetet (a, b, c-d):

(a) *(2 pont)* Határozd meg ω_0 értékét és $\vec{v}_0$ irányát, ahhoz hogy a tömegközéppont állandó $\vec{v} = \vec{v}_0$ sebességgel mozogjon!

(b) *(3 pont)* Adott ω_0 esetén határozd meg azt a $\vec{v}_0$ vektort (irányt és nagyságot), amelynek eredményeképp a tömegközéppont körpályán fog mozogni! Határozd meg a körpálya R_c sugarát és középpontjának x_c és y_c koordinátáit! Nem kell bizonyítanod, hogy csak egyetlen megoldás létezik.

(c) *(4 pont)* Legyen $\vec{v}_0 = 0$. Határozd meg azt a legkisebb $\omega_0 = \omega_{\min}$ szögsebességet, ami ahhoz szükséges, hogy a dipólus iránya ellentétessé váljon a mozgása során!

(d) *(1 pont)* Ha a dipólus úgy indul, hogy $\vec{v}_0 = 0$ és a szögsebessége a (c) részben meghatározott $\omega_0 = \omega_{\min}$, akkor a tömegközéppont pályájának van egy aszimptotája. Határozd meg az aszimptota D távolságát az origótól!

Hasznos vektorazonosság:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b}),$$

ahol a "$\times$" és a "$\cdot$" rendre a vektoriális, illetve a skaláris szorzatot jelöli.