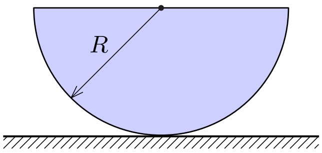
Szakköri feladatok

2022. december 12.-re

1. Félbevágott narancs rezgése

Az asztalon egy szinte tökéletes R sugarú félgömb alakú, félbevágott narancs nyugszik. Határozzuk meg a (homogénnek tekintett) narancs egyensúlyi helyzete körüli kis rezgéseinek körfrekvenciáját! (A tapadási súrlódási tényező elegendően nagy ahhoz, hogy a narancs ne csússzon meg, a félgömb súlypontja a sugár 3/8-ad részénél van.)

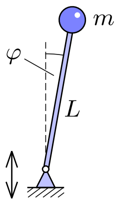


2. Különleges lejtő

Egy α hajlásszögű lejtőn a súrlódási együttható a lejtő tetejétől mért távolsággal arányosan nő: $\mu(x) = \gamma x$. Írjuk le a lejtő tetejéről induló m tömegű, r sugarú abroncs mozgását! Mennyi idő múlva fog az abroncs tisztán gördülni?

3. A Kapica-inga

Egy m tömegű kicsiny gömbből és egy hozzá képest elhanyagolható tömegű, egyik végén tengelyezett, L hosszúságú merev rúdból ingát készítünk. Az inga legalsó helyzetében stabil egyensúlyban van, a legfölső helyzete viszont közismerten instabil: innen elengedve azonnal eldől, akár egy hegyére állított ceruza. Ha azonban az inga felfüggesztési pontját függőlegesen, kis amplitúdóval, nagy frekvenciával rezgetjük, az inga legfelső, $\varphi = 0°$-os helyzete stabillá válhat. A jelenség magyarázatát 1951-ben a Nobel-díjas szovjet fizikus, Pjotr Kapica adta meg. Ebben a feladatban a „fejenálló” inga stabilizálásához szükséges feltételeket fogjuk meghatározni kétféle időfüggésű rezgetés esetére.



I. rész.

Ebben a részben a felfüggesztési pontot függőlegesen úgy rezgetjük, hogy sebessége az idő függvényében periodikusan, háromszögjel szerint változzon. A rezgés periódusidejét T-vel jelölve a felfüggesztési pont gyorsulását tehát az

$$a(t) = \begin{cases} +a_0, & \text{ha} \quad \left(n - \frac{1}{4}\right) T < t < \left(n + \frac{1}{4}\right) T, \\ -a_0, & \text{ha} \quad \left(n + \frac{1}{4}\right) T < t < \left(n + \frac{3}{4}\right) T \end{cases}$$

függvénnyel adhatjuk meg, ahol n egész szám, a pozitív irányt pedig függőlegesen felfelé választottuk. A gravitáció hatását az I.1., I.2. és az I.3. feladatokban teljesen hanyagoljuk el!

I.1. Az ingát a legfelső helyzetéből kicsiny $\varphi_0 \ll 1$ szöggel kitérítjük, majd a $t = 0$ időpillanatban kezdősebesség nélkül elengedjük. Ábrázoljuk az inga φ kitérését az idő függvényében és határozzuk meg a kezdőállapothoz viszonyított maximális $\Delta\varphi$ szögeltérülést! Tegyük fel, hogy $\Delta\varphi \ll \varphi_0$. *Segítség: Üljünk bele a felfüggesztési ponttal együtt mozgó koordinátarendszerbe.*

I.2. Az előző feladatbeli közelítéseket felhasználva határozzuk meg az inga helyzetét jellemző φ szög egy periódusra vett $\langle\varphi(t)\rangle$ időátlagát, valamint az ettől az értéktől való átlagos eltérést, azaz a $\langle|\varphi(t) - \langle\varphi(t)\rangle|\rangle$ mennyiséget!

I.3. Az előző feladat eredményét felhasználva határozzuk meg az ingára ható forgatónyomaték egy periódusra vett $\langle M\rangle$ időátlagát a felfüggesztési ponthoz rögzített vonatkoztatási rendszerben!

I.4. Most vegyük figyelembe a gravitáció hatását is. Feltételezhetjük, hogy $g \ll a_0$, így az inga gravitáció hatására bekövetkező szögkitérése sokkal kisebb, mint az I.1. feladatban meghatározott $\Delta\varphi$ érték. Írjunk föl egy egyenletet, amely leírja az inga egy periódusra vett átlagos $\langle\varphi\rangle$ kitérésének időbeli változását! (Az egyenletet nem kell megoldani.)

I.5. Az előző feladatban kapott egyenlet felhasználásával határozzuk meg, milyen egyenlőtlenségnek kell fennállnia g, L, a_0 és a rezgés T periódusideje között ahhoz, hogy az inga legfelső helyzete stabil legyen!

II. rész.

Ebben a részben a felfüggesztési pontot függőlegesen harmonikus időfüggéssel rezgetjük az $A\sin(\omega t)$ kifejezés szerint ($A \ll L$).

II.1. Írjunk fel egy egyenletet, amely leírja az inga φ kitérésének időbeli változását a felfüggesztési ponthoz rögzített (gyorsuló) koordináta-rendszerben! Az egyenletet nem kell megoldani.

II.2. Tegyük fel, hogy az inga $\varphi(t)$ szögkitérésének időfüggése két részre bontható: egy gyorsan oszcilláló részre és egy lassan változó, nem oszcilláló részre, azaz

$$\varphi(t) = \alpha(t)\sin\omega t + \beta(t)\,,$$

ahol $\alpha(t)$ és $\beta(t)$ sokkal lassabban változó függvények, mint $\sin\omega t$. Ezt a próbamegoldást az $a)$ részben kapott mozgásegyenletbe helyettesítve, majd a $g \ll A\omega^2 \ll L\omega^2$ közelítéseket alkalmazva fejezzük ki $\alpha(t)$-t $\beta(t)$, A, ω és g segítségével!

II.3. Az eddigi közelítéseket alkalmazva írjunk fel egy egyenletet $\beta(t)$ időbeli változására, majd g, L és A segítségével adjuk meg, legalább mekkora ω körfrekvencia szükséges a rúd felső helyzetének stabilizálásához!