Szakköri feladatok

2023. január 9.-re

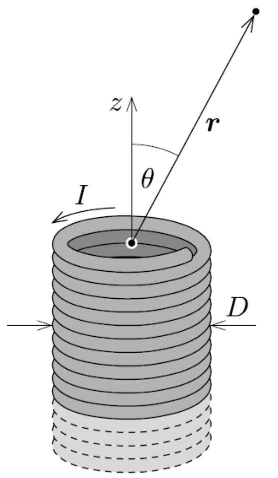
Ponttöltés mozgása mágneses monopólus terében

A. Mágneses mező a szolenoid vége közelében

Ebben a részben egy légmagos, nagyon hosszú, egyenes tekercs (szolenoid) mágneses mezőjét vizsgáljuk az egyik végének közelében. Használjuk az ábrán látható koordináta-rendszert (a szokásos z, r, θ koordinátákkal), melynek origója a szolenoid tengelyén (z tengely), a tekercs végére illeszkedő síkban van. A tekercs átmérője D, benne állandó I erősségű áram folyik, menetsűrűsége (egységnyi hosszra jutó meneteinek száma) n. A szolenoidon kívül, az $\boldsymbol{r}$ helyvektorral jellemzett pontban (ahol a helyvektor $|\boldsymbol{r}| = r$ hossza sokkal kisebb, mint a szolenoid hossza, de $r \gg D$) a mágneses mező indukcióvektora jó közelítéssel a következő alakban adható meg:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \lambda \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \tag{1}$$

ami egy mágneses monopólus terével analóg.



A.1. Határozzuk meg a λ tényező értékét D, I, n és univerzális konstansok felhasználásával!

Egy igen hosszú, D_1 átmérőjű szolenoid menetsűrűsége n_1, benne I_1 erősségű áram folyik. Egy másik, ugyanilyen hosszú szolenoid ugyanezen adatai D_2 ($D_2 < D_1$), n_2 és I_2. A vékonyabb szolenoidot hosszának feléig koaxiálisan beledugjuk a másik tekercsbe.

A.2. Mekkora erőt fejt ki a vékonyabb szolenoid a vastagabbra?

B. Töltött részecske mozgása a tekercs végének közelében

Tekintsünk egy Q töltésű, m tömegű töltött részecskét, amely a szolenoid végének közelében mozog. A mágneses mező indukciójának helyfüggésére használjuk mindvégig az (1) egyenlettel megadott monopól-közelítést! A gravitáció hatása ebben a feladatban elhanyagolható. A töltött részecske origóra vonatkoztatott $\boldsymbol{L}$ impulzusmomentum-vektora a mozgás során nem marad meg, azonban a

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + C\boldsymbol{e}_r \tag{2}$$

összefüggéssel definiált $\boldsymbol{J}$ vektor megmaradó mennyiség (itt C konstans, $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{r}/r$ pedig az origótól a részecske felé mutató egységvektor).

B.1. Adjuk meg a C együttható értékét Q, λ és konstansok segítségével! *Útmutatás:* Szükségünk lehet az ún. kifejtési tételre, mely szerint $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{ab})$.

Megmutatható, hogy általános esetben a részecske a mozgása során olyan térgörbén mozog, amely egy kúppalástra illeszkedik. Ennek a kúppalástnak a csúcsa a koordináta-rendszerünk origójában található.

B.2. Írjunk fel egy egyenletet a kúppalást félnyílásszögére a részecske kezdeti impulzusmomentumának L_0 nagysága, Q és λ segítségével!

Tegyük fel, hogy a részecske kezdetben a z tengelyen, az origó fölött r_0 magasságban helyezkedik el, kezdősebessége v_0, sebessége pedig $\alpha_0 < 90°$ szöget zár be a $-z$ iránnyal.

B.3. Számítsuk ki, mekkora $r_{\min}$ távolságra közelíti meg a részecske az origót a további mozgása során! A választ r_0 és α segítségével adjuk meg!

B.4. A kezdeti helyzetéből mennyi idő alatt közelíti meg a részecske az origót $r_{\min}$ távolságra? Az eredményt r_0, v_0 és α_0 felhasználásával adjuk meg. *Útmutatás:* Vizsgáljuk a részecske gyorsulásának irányát!

Belátható, hogy a (2) egyenlet jobb oldalán szereplő második tag az elektromágneses tér impulzusmomentumának felel meg, így a $\boldsymbol{J}$ vektor a részecskéből és az elektromágneses térből álló rendszer teljes impulzusnyomatékát jelenti. A kvantumelmélet szerint ennek a teljes impulzusmomentumnak egy tetszőleges irányra (például az $\boldsymbol{e}_r$ irányra) vett vetülete $\hbar/2$ egységekben kvantált. Paul Dirac 1931-ben felvetette, hogy ha létezne valahol az univerzumban egyetlen mágneses monopólus, az magyarázatot adna az elektromos töltés kvantáltságára.

B.5. Mekkora lenne ennek a mágneses monopólusnak a póluserőssége? (Póluserősség alatt az (1) összefüggésben szereplő λ mennyiség $4\pi/\mu_0$-szorosát értjük, ahol μ_0 a vákuum permeabilitása.) A választ univerzális állandókkal adjuk meg.