Szakköri feladatok

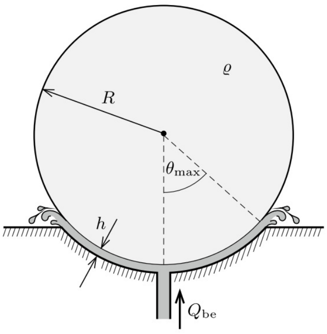
2023. január 30.-ra

Furfangos szökőkút

Köztereken, parkokban láthatunk olyan szökőkutat, amely „vízen úszó” gránitgömbből vagy gránithengerből áll (lásd az alábbi *fényképet*). Az ilyen szökőkutak felépítése a következő: a (rendszerint tömör) gránitgömb vagy gránithenger egy jól illeszkedő vályúban található, melynek alján rés van. A résen keresztül egy szivattyú folyamatosan vizet pumpál a vályúba, amely a vályú pereménél kifolyik. A gránittömb és a vályú között vékony (általában 1–2 milliméter vastagságú) vízréteg alakul ki, így az nem érintkezik a vályú falával, csak a vízzel. Vajon hogyan képes megtartani a víz a nála sokkal nagyobb sűrűségű gránittömb súlyát? Ez a feladat ezzel a kérdéssel foglalkozik.

Az egyszerűség kedvéért a gránittömböt egy L hosszúságú, R sugarú, ϱ sűrűségű, tömör hengernek tekintjük, ahol $L \gg R$. A vályú alján található befolyónyílás legyen egy L hosszúságú, keskeny rés, így a feladat során elegendő csupán az *ábrán* látható síkmetszetben vizsgálódnunk. A vályú magasságát a $\theta_{\max}$ szöggel jellemezhetjük. A résen áthaladó vízhozamot az időegység alatt befolyó víz térfogatával írhatjuk le, amely időben állandó:

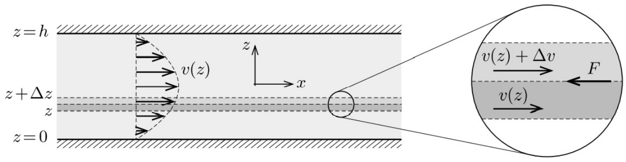
$$Q_{\text{be}} = \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$



A feladatban vizsgált konkrét szökőkútnál legyen $L = 2$ m, $R = 0{,}3$ m, $\theta_{\max} = 30°$; a gránit ϱ sűrűsége pedig a víz $\varrho_{\text{víz}}$ sűrűségének 2,75-szerese.

1. A víz hidrosztatikai felhajtóereje nyilván nem képes megtartani a gránithenger súlyát. Adjuk meg a felhajtóerő és a gránithengerre ható nehézségi erő hányadosát ϱ, $\varrho_{\text{víz}}$ és $\theta_{\max}$ segítségével, majd adjuk meg az eredményt számszerűen is!

A továbbiakban a felhajtóerő szerepét hanyagoljuk el! A gránithengert megtartó erő megértéséhez figyelembe kell vennünk az áramló víz belső súrlódását. Ehhez tekintsünk egy folyadékot, amely két vízszintes, párhuzamos, egymástól h távolságra lévő síklap között lassan áramlik x irányban (lásd az *ábrát*).



Ha két szomszédos folyadékréteg (például az ábrán látható, az alsó síklaptól z és $z + \Delta z$ távolságra található rétegek) különböző sebességgel mozog, akkor közöttük a Δv relatív sebességükkel és az érintkezési felületük nagyságával arányos súrlódási erő ébred (Newton-féle súrlódási törvény):

$$F = \eta A \frac{\Delta v}{\Delta z}, \qquad (1)$$

ahol η a folyadék anyagára jellemző állandó, a viszkozitás. Ez az erő benne van a folyadékok érintkezési felületének síkjában, és a relatív sebességgel ellentétes irányba mutat. A $\sigma = F/A$ mennyiséget nyírófeszültségnek nevezzük.

2. Mivel a folyadék z irányban nem áramlik, így ebben az irányban nem hat nyírófeszültség, ezért a folyadékban a nyomás csak az x koordinátától függ, z-től nem. Mutassuk meg, hogy stacionárius (időben állandó) áramlás esetén a $\sigma(z)$ nyírófeszültség térbeli változása (gradiense) és a $p(x)$ nyomás gradiense között fennáll a

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{\Delta \sigma}{\Delta z} \qquad (2)$$

összefüggés!

3. A (2) egyenlet bal oldala csak x-től, jobb oldala pedig csak z-től függ, ezért mindkét oldalnak különkülön állandónak kell lennie. Jelöljük ezt az állandót $-K$-val, ahol K pozitív mennyiség:

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{\Delta \sigma}{\Delta z} = -K.$$

Lássuk be, hogy a síklapok között a folyadék sebessége a

$$v(z) = Az^2 + Bz + C$$

függvénnyel írható le, és határozzuk meg az A, B és C konstansok értékét η, h és K segítségével! (A folyadék sebessége a síklapoknál nulla.)

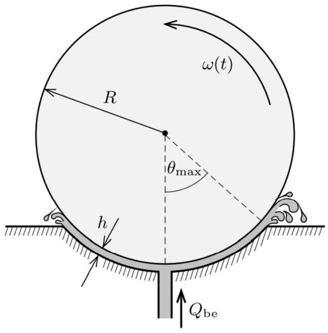
4. A szökőkút esetében a vízréteg vastagsága sokkal kisebb a gránithenger sugaránál, ezért használhatjuk a 2–3. részfeladatokban kapott eredményeket. Határozzuk meg, mekkorának kell lennie a túlnyomásnak a vályú alján (a víz beáramlási pontjánál) ahhoz, hogy a gránithenger egyensúlyban legyen! Válaszunkat ϱ, R, $\theta_{\max}$ és a g nehézségi gyorsulás segítségével adjuk meg! (Számításainkban a hengerre érintőirányban ható nyírófeszültség hatását és a Bernoulli-törvényből származó nyomáscsökkenést hanyagoljuk el.)

5. Határozzuk meg a vályú alján található nyíláson beáramló víz Q_{be} hozamát, ha ismert, hogy a vályú és a gránithenger közötti vízréteg vastagsága h! A választ az η, ϱ, $\theta_{\max}$, g, L és h mennyiségek felhasználásával adjuk meg.

6. Ha a gránithengert tengelye körül forgásba hozzuk, a 3. részfeladatban a víz sebességprofiljára kapott (3) formulát módosítani kell egy z-vel egyenesen arányos tag hozzáadásával:

$$v(z,\omega) = v(z) \pm Dz,$$

ahol $v(z,\omega)$ a henger ω szögsebességétől függő sebességprofil, D a szögsebességet tartalmazó arányossági tényező, a $\pm$ előjel pedig a henger két oldalán áramló folyadékrészre utal. Fejezzük ki D értékét ω, R és h segítségével, ha továbbra is fennáll, hogy a víz falakhoz viszonyított relatív sebessége zérus!



7. Forgás közben a víz által kifejtett nyírófeszültség fékezi a gránithengert. Milyen mozgást végez ekkor a henger? Adjuk meg a henger szögsebességét az idő függvényében, ha a kezdeti szögsebessége ω_0. A választ ϱ, R, h, $\theta_{\max}$, ω_0 és η segítségével adjuk meg!