43. Nemzetközi Fizikai Diákolimpia — Elméleti verseny

Tartu, Észtország — 2012. július 17., kedd

- A verseny 5 óráig tart. 3 feladatot kell megoldanod, amire összesen 30 pontot kaphatsz. Figyelj arra, hogy a feladatok különböző értékűek!
- **Tilos kinyitnod a feladatokat tartalmazó borítékot a verseny kezdetét jelző sípszó előtt (három rövid jel).**
- **Nem szabad elhagynod a munkahelyedet engedély nélkül.** Ha szükséged van bármilyen segítségre (elromlott a számológéped, WC-re szeretnél menni, stb.), emeld fel a helyeden található megfelelő hosszúnyelű zászlót („HELP" or „TOILET") a helyedet körülvevő fal fölé, és tartsd úgy, amíg a szervezők odaérnek.
- **A megoldásodat azokkal a mennyiségekkel kell kifejezned, amelyek színezéssel ki vannak emelve** a feladat szövegében. Ezen kívül tartalmazhat alapvető állandókat, ha szükséges. Tehát, ha az van írva, hogy „a doboz magassága a és a szélessége b" akkor a használható a megoldásban, de b nem használható (kivéve, ha máshol ki van emelve – lásd később). Azok a mennyiségek, amelyek az alkérdés szövegében vannak kiemelve, csak az alkérdés megoldásában használhatók; azok a mennyiségek, amelyek a feladat (vagy a feladat egyik részének) bevezető szövegben vannak kiemelve, azaz az alkérdésen kívül, azok a feledat (vagy a feladat egyik részének) minden megoldásában használhatók.
- Csak a papír egyik oldalára írjál!
- Minden feladathoz vannak **hozzátartozó megoldás lapok (Solution Sheets)** (lásd a fejlécben a számokat és a piktogrammokat). Megoldásodat a megfelelő megoldás lapokra (Solution Sheets) írd! A megoldás lapok (Solution Sheets) minden feladathoz számozva vannak; használd a lapokat a számozásnak megfelelően. **Mindig jelöld meg, hogy melyik feladat résszel (Problem Part) és kérdéssel (Question) foglalkozol!** A végső megoldásodat másold át a **válaszlapok (Answer Sheets)** megfelelő részére. Ezen kívül vannak **üres (Draft)** lapok; ezekre írd azt, amit nem akarsz, hogy értékeljenek. Ha a megoldás lapokra (Solution Sheets) olyat írtál, amit mégsem akarod, hogy értékeljenek (például próbálkozás, vagy rossz megoldás) húzd egyszerűen át!
- Ha egy adott problémához még több papírra van szükséged, emeld fel a „HELP" zászlót, és mond meg a rendezőknek a feladat számát; ekkor két megoldás lapot (Solution sheets) kapsz (de ezt többször is megismételheted).
- **Csak annyi szöveget használj, amenny feltétlen szükséges:** a megoldásodban elsősorban egyenleteket, számokat, szimbólumokat és grafikonokat használj!
- Az első szimpla hangjelzés arra figyelmeztet, hogy 30 perced van hátra, a második dupla hangjelzéskor 5 perced van hátra, a harmadik hármas hangjelzéskor vége a versenynek. **A harmadik hangjelzés után azonnal be kell fejezned a munkát!** Tegyél be minden lapot az asztalon lévő borítékba. **A teremből semmilyen lapot nem vihetsz ki.** Ha hamarabb kész vagy, és be szeretnéd adni a megoldásodat, emeld fel a zászlódat.

T1. feladat Ragadd meg a lényeget! *(13 pont)*

A. rész Hajítás *(4,5 pont)*

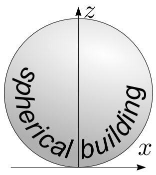
Egy v_0 kezdősebességgel elhajított golyó homogén gravitációs térben mozog az $x-z$ síkban, ahol az x-tengely vízszintes, a z-tengely pedig függőleges, a g nehézségi gyorsulással ellentétes irányú. A közegellenállást hanyagold el!

i. (0,8 pont) A golyót rögzített v_0 nagyságú kezdősebességgel az origóból különböző irányokban elindítva azok a célpontok találhatók el, melyek a

$$z \leq z_0 - kx^2$$

egyenlőtlenséggel adott tartományban helyezkednek el (ezt a tényt bizonyítás nélkül felhasználhatod). Határozd meg a z_0 és k konstansok értékét!

ii. (1,2 pont) Ebben a részben a kilövési pont szabadon választható a $z = 0$ talajszinten, és a kilövés szöge is alkalmasan választható; a cél eltalálni egy R sugarú, gömb alakú épület legfelső pontját (lásd az ábrát) a lehető legkisebb v_0 sebességgel (a célpont elérése előtt nem engedünk meg pattogást az épületen). Vázold fel kvalitatíven a golyó optimális pályájának alakját (használd az erre kijelölt mezőt a válaszlapon)! A pontszám a pálya felvázolásáért jár.



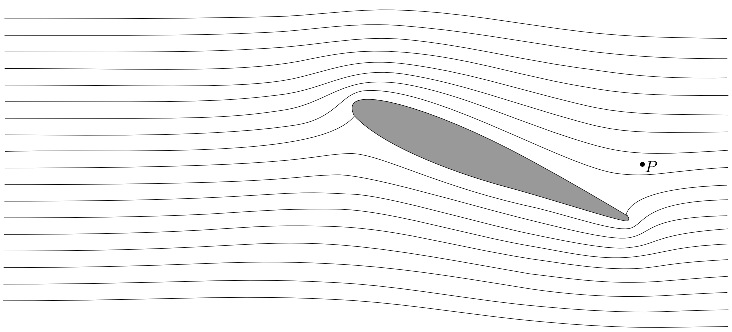
iii. (2,5 pont) Mekkora minimális $v_{\min}$ kilövési sebesség szükséges az R sugarú, gömb alakú épület legfelső pontjának eltalálásához?

La Géode, Parc de la Villette, Paris.Photo: katchooo/flickr.com

B. rész Légáramlás a szárny körül *(4 pont)*

Ebben a részben hasznosak lehetnek a következő információk: Folyadék vagy gáz csőben történő áramlása esetén egy áramvonal mentén $p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const.}$, feltéve, hogy a v sebesség sokkal kisebb a hangsebességnél. Itt ρ a sűrűség, h a magasság, g a nehézségi gyorsulás és p a nyomás. Az áramvonalakat a részecskék pályájaként definiálhatjuk, amennyiben az áramlás stacionárius. Az $\frac{1}{2}\rho v^2$ tagot dinamikus nyomásnak nevezzük.

Az alábbi ábrán egy repülőgépszárny keresztmetszete látható a szárny körül áramló levegő áramvonalaival együtt, a szárnyhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben. Tegyük fel, hogy (a) az áramlás tisztán kétdimenziós (azaz a levegő sebességvektorai az ábra síkjában fekszenek); (b) az áramvonalkép független a repülőgép sebességétől; (c) szél nincs; (d) a dinamikus nyomás jóval kisebb a $p_0 = 1.0 \times 10^5\,\text{Pa}$ légköri nyomásnál. Használd a vonalzót a válaszlapon található ábrán végzett mérésekhez!



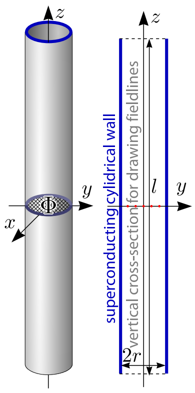
i. (0,8 pont) Ha a repülőgép sebessége a földhöz viszonyítva $v_0 = 100\,\text{m/s}$, mekkora a levegő v_P sebessége az ábrán jelzett P pontban a földhöz képest?

ii. (1,2 pont) Nagy relatív páratartalom esetén, ha a repülőgép sebessége a földhöz képest túllép egy kritikus v_{crit} értéket, a szárny mögött páracseppek sávja keletkezik. A cseppek egy jellemző Q pontban jelennek meg. Jelöld be a Q pontot a válaszlapon található ábrán! Kvalitatíven magyarázd meg (lehetőleg képletekkel, a lehető legkevesebb szöveggel), hogyan határoztad meg ezt a pontot!

iii. (2,0 pont) Becsüld meg a v_{crit} kritikus sebesség értékét a következő adatok felhasználásával: a levegő relatív páratartalma $r = 90\%$, a levegő állandó nyomáson mért fajhője $c_p = 1.00 \times 10^3\,\text{J/kg}\cdot\text{K}$, a telített vízgőz nyomása a meg nem zavart levegő $T_a = 293\,\text{K}$ hőmérsékletén $p_{sa} = 2.31\,\text{kPa}$, $T_b = 294\,\text{K}$ hőmérsékleten pedig $p_{sb} = 2.46\,\text{kPa}$. Az alkalmazott közelítésektől függően szükséged lehet a levegő állandó térfogaton mért $c_V = 0.717 \times 10^3\,\text{J/kg}\cdot\text{K}$ fajhőjére is. A relatív páratartalom a gőznyomás és a telítési gőznyomás hányadosa egy adott hőmérsékleten. A telítési gőznyomás az a gőznyomás, ahol a gőz egyensúlyban van a folyadékával.

C. rész Mágneses csövek *(4.5 pont)*

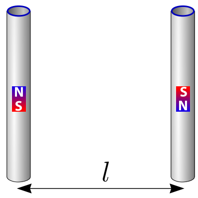
Tekintsünk egy szupravezető anyagból készült hengeres csövet! A cső hossza l, belső sugara r; $l \gg r$. Legyen a cső középpontja az origó, tengelye pedig a z-tengely! A cső középső keresztmetszetén Φ mágneses fluxus halad át ($z = 0$, $x^2 + y^2 < r^2$). A szupravezető minden mágneses teret kizár magából (a szupravezető anyagban nincs mágneses tér.)



i. (0,8 pont) Vázolj fel öt olyan mágneses indukcióvonalat a válaszlapon kialakított mezőbe, amelyek átmennek a cső hossztengelyére eső keresztmetszeti rajzon bejelölt öt piros ponton.

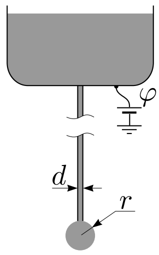
ii. (1,2 pont) Határozd meg a cső közepén ébredő z-irányú T erőt, amivel a cső $z > 0$ és $z < 0$ részei hatnak egymásra!

iii. (2,5 pont) Most tekintsünk még egy ugyanilyen csövet, amely párhuzamos az elsővel! A második csőben ellentétes irányú a mágneses mező, és középpontja az $y = l$, $x = z = 0$ pontban helyezkedik el (azaz a csövek egy képzeletbeli négyzet szemközti oldalait alkotják). Határozd meg a csövek között ható F mágneses erőt!



T2. feladat Kelvin csepegtetős gépe *(8 pont)*

A következő tények hasznosak lehetnek: A folyadék felületét kevésbé kedvelik a részecskék, mint az anyag belsejét. Emiatt a határfelülethez $U = \sigma S$ felületi energia rendelhető, ahol S a határfelület területe és σ a folyadék felületi feszültsége. Továbbá a folyadékfelszín két darabkája $F = \sigma l$ erővel vonzza egymást, ahol l a darabkákat elválasztó egyenes határvonal hossza. Egy víztartályhoz csatlakozó, d belső átmérőjű, hosszú fémcső függőlegesen lefelé áll; a cső alsó kimeneti nyílásából lassan víz csöpög ki, lásd az ábrát. A vizet elektromosan vezetőnek tekinthetjük; a víz felületi feszültsége σ, sűrűsége ρ. A kimeneti nyílásról lelógó, gömbnek tekinthető vízcsepp sugara r. Mindvégig feltehetjük, hogy $d \ll r$.A vízcsepp nagyon lassan növekszik egészen addig, amíg a g nehézségi gyorsulás hatására le nem esik.



A. rész Egy cső *(4 pont)*

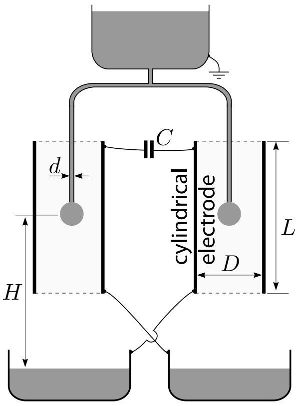
i. (1,2 pont) Add meg a vízcsepp $r_{\max}$ sugarát abban a pillanatban, amikor leszakad a cső kimeneti nyílásáról.

ii. (1,2 pont) A nagyon távoli környezethez képest a cső elektromos potenciálja φ. Határozd meg a csepp Q töltését, amikor a csepp sugara r.

iii. (1,6 pont) Ebben az alkérdésben a φ potenciál lassan növekszik, azonban tegyük fel, hogy a csepp r sugara állandó marad. A vízcsepp instabillá válik, és két darabra szakad szét, ha a vízcsepp belsejében a nyomás kisebbé válik, mint a külső légnyomás. Határozd meg azt a $\varphi_{\max}$ potenciált, amikor a szétszakadás bekövetkezik.

B. rész Két cső *(4 pont)*

A két csőből álló berendezést „Kelvin csepegtetős gépének" nevezzük, melyben a két cső megegyezik az A részben leírtakkal. A két cső az ábrán látható T-elágazással kapcsolódik a víztartályhoz. Mindkét cső kimeneti nyílása egy-egy fémhenger-elektróda középpontjába esik (a hengerpalástok magassága L, átmérőjük D, $L \gg D \gg r$); mindkét cső esetén az időegységenként lecseppenő cseppek száma n. A cseppek H magasságból a kimeneti nyílások alatt elhelyezkedő, elektromosan vezető edényekbe esnek. Az edények az ábrán látható módon az átellenes henger-elektródákkal vannak elektromosan összekötve. A hengerelektródák közé C kapacitású kondenzátor van kapcsolva. A rendszer össztöltése kezdetben nulla. Az első leeső csepp mikroszkopikus töltéssel rendelkezik, amely felborítja a két oldal közötti egyensúlyt és kis töltésszétválást okoz a kondenzátoron. Vedd észre, hogy a tartály földelt!



i. (1,2 pont) Fejezd ki a lecseppenő cseppek Q_0 töltésének nagyságát akkor, amikor a kondenzátor töltése q. Megoldásodat fejezd ki az A/i. részben meghatározott $r_{\max}$ paraméter segítségével. Tekints el az A/iii. részben leírt effektustól!

ii. (1,5 pont) Határozd meg a q töltést a t idő függvényében. Tekintsd a $q(t)$ függvényt folytonosnak, és tételezd fel, hogy $q(0) = q_0$.

iii. (1,3 pont) A csepegtető működését az A/iii. részben leírt jelenség akadályozhatja. Az elérhető $U_{\max}$ határfeszültséget azonban a csepp és az alatta lévő edény elektrosztatikus taszító hatása határozza meg. Határozd meg $U_{\max}$ értékét.

T3. feladat Csillagkezdemény kialakulása *(9 pont)*

Modellezzük a csillagok keletkezését a következőképpen. Egy gömb alakú csillagközi gázfelhő a saját gravitációja hatására összeroskad. A gázfelhő kezdeti sugara r_0, a tömege pedig m. A gázfelhő környezete a gázfelhőnél sokkal ritkább. A környezet és a gázfelhő kezdeti hőmérséklete mindenhol T_0. A gázt ideális gáznak tekinthetjük. A gáz átlagos moláris tömege μ, a fajhőhányados $\gamma > \frac{4}{3}$. Tételezzük fel, hogy $G\frac{m\mu}{r_0} \gg RT_0$, ahol R az egyetemes gázállandó, G pedig a gravitációs állandó.

i. (0,8 pont) Az összeroskadás jelentős részében a gáz annyira átlátszó, hogy a keletkező hő azonnal szétsugárzódik, azaz a gázfelhő termodinamikai egyensúlyban marad a környezetével. Miközben a sugár megfeleződik ($r_1 = 0.5r_0$), a nyomás n-szeresére változik. Határozd meg n értékét! Tételezd fel, hogy a gáz sűrűségeloszlása végig homogén marad!

ii. (1 pont) Becsüld meg azt a t_2 időt, amely alatt a sugár az eredeti r_0 értékről $r_2 = 0.95r_0$ értékre csökken! Itt hanyagold el a gravitációs tér változását!

iii. (2,5 pont) Tételezd fel, hogy a nyomás mindvégig elhanyagolható marad! Határozd meg az összeroskadás idejét, azt az időt, amíg a sugár a kezdeti r_0 értékről egy sokkal kisebb értekre csökken! Használd a Kepler-törvényeket!

iv. (1,7 pont) Egy bizonyos $r_3 \ll r_0$ sugárnál a gáz annyira sűrűvé válik, hogy elnyeli a hőmérsékleti sugárzást. Számold ki a kisugárzott hőenergiát az összeroskadás kezdeti szakaszában, amikor a sugár r_0 értékről r_3 értékre csökken!

v. (1 pont) Amikor a sugár kisebb, mint r_3, a hőmérsékleti sugárzást elhanyagolhatjuk. Határozd meg a gázgömb T hőmérsékletét az $r < r_3$ sugarának függvényében.

vi. (2 pont) Az összeroskadás végén a nyomás hatását a gáz mozgására nem hanyagolhatjuk el, és az összeroskadás megáll $r = r_4$ sugárnál ($r_4 \ll r_3$). A sugárzást továbbra is hanyagoljuk el, és tegyük fel, hogy a hőmérséklet nem elég magas a magfúzió beindulásához. Egy ilyen csillagkezdeményben a nyomás már nem homogén, de egy szorzó erejéig durva közelítést adhatunk a keresett értékekre. *Becsüld* meg a végső r_4 sugarat és a hozzá tartozó T_4 hőmérsékletet!