

2. Feladat (Problem 2): Van der Waals állapotegyenlet (11 pont)

Az ideális gázok jól ismert állapotegyenlete ugyan kielégíti a Clapeyron-Mengyelejev törvényt, azonban a következő fontos fizikai hatásokat elhanyagolja. Először, a valódi gárzszecskék mérete nem nulla; másodsor, a részecskék kölcsönhatnak egymással. Ebben a feladatban mindenütt *egy mól* vizet vizsgálunk.

A rész (Part A): Nem ideális gáz állapotegyenlete (2 pont)

A részecskék véges méretének figyelembevételével a gáz állapotegyenlete

$$P(V - b) = RT, \quad (1)$$

ahol P, V, T rendre a gáz nyomását, moláris térfogatát és hőmérsékletét jelöli, R az univerzális gázállandó, b pedig egy konstans, mely a kizárt térfogatot jellemzi.

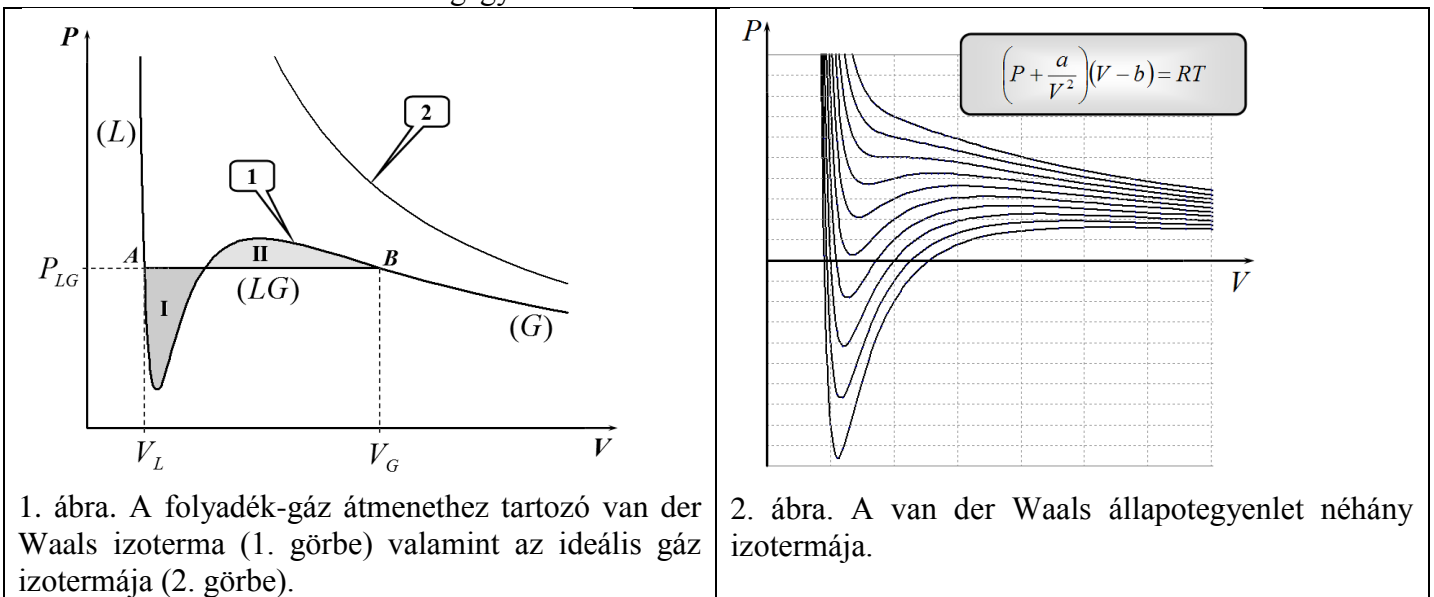
A1 Becsüld meg a b konstans értékét, és fejezd ki a molekulák d átmérőjével! (0,3 pont)

A molekulák közti vonzó kölcsönhatás figyelembevételére van der Waals a következő állapotegyenletet javasolta, mely jól leírja a közegeket mind folyadék mind a gáz fázisban:

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT. \quad (2)$$

Az egyenletben szereplő a egy másik konstans.

Bizonyos T_c kritikus hőmérséklet alatti T hőmérsékletek esetén a (2) egyenlet izotermái az 1. ábra 1. jelű görbéjéhez hasonló nem monoton függvények. Ezeket van der Waals izotermáknak nevezzük. Ugyanezen az ábrán a 2. jelű görbe az ideális gáz megfelelő izotermáját mutatja. A valódi izotermák a van der Waals izotermáktól abban különböznek, hogy az **AB** szakaszon a nyomás értéke konstans, melyet P_{LG} jelöl. A konstans szakasz a V_L és V_G térfogattal jelölt állapotok között helyezkedik el, ahol a két térfogat rendre a folyadék (**L**iquid, **L** index) illetve a gáz (**G**as, **G** index) fázis móltérfogatát jelöli. A termodinamika második főtételét felhasználva J. Maxwell megmutatta, hogy a P_{LG} nyomás az az érték, amely mellett az ábrán látható **I.** és **II.** területek megegyeznek.



A hőmérséklet növelésével az izotermák **AB** konstans szakasza egyetlen ponttá zsugorodik össze, amikor a hőmérséklet illetve a nyomás eléri egy bizonyos T_c illetve $P_{LG} = P_c$ értéket. A P_c és T_c értékeket, melyek kísérletileg nagy pontossággal mérhetők, kritikus értékeknek nevezzük.

A2	Fejezd ki a van der Waals egyenletben szereplő a és b paraméter értékét T_c és P_c segítségével! (1,3 pont)
A3	Víz esetében $T_c = 647$ K és $P_c = 2,2 \cdot 10^7$ Pa. Add meg víz (water) esetén az a_w és b_w paraméterek numerikus értékét! (0,2 pont)
A4	Becsüld meg a vízmolekulák d_w átmérőjét! (0,2 pont)

B rész (Part B): Gáz és folyadék fázis tulajdonságai (6 pont)

A feladatnak ebben a részében $T = 100\text{ °C}$ hőmérsékletű víz tulajdonságait vizsgáljuk gáz illetve folyadék fázisban. Jól ismert, hogy ezen a hőmérsékleten a telített vízgőz nyomása $p_{LG} = p_0 = 1,0 \cdot 10^5\text{ Pa}$, a víz moláris tömege pedig $\mu = 1,8 \cdot 10^{-2} \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$

Gáz fázis

Ésszerű feltételezés, hogy gáz halmazállapotában fennáll a $V_G \gg b$ egyenlőtlenség.

B1 Fejezd ki a V_G térfogatot az R, T, p_0 és a mennyiségek segítségével! **(0,8 pont)**

Az ideális gáz állapotegyenletét használva kicsit más V_{G0} móltérfogat adódik, ami jól közelíti a fenti móltérfogatot.

B2 Határozd meg a gőz móltérfogatának a molekulák közti vonzóerő hatására bekövetkező relatív csökkenését, azaz a $\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} = \frac{V_{G0} - V_G}{V_{G0}}$ mennyiséget! **(0,3 pont)**

Ha a rendszer térfogatát V_G alá csökkentjük, akkor a gőz általában elkezd lecsapódni. Azonban ha a gáz igen tiszta, akkor mechanikai szempontból metastabil állapotban is maradhat (ezt túlhűtött gőznek nevezünk). A metastabil állapot végső határa a $V_{G\min}$ móltérfogat.

Állandó hőmérsékleten a túlhűtött gőz létezésének a feltétele: $\frac{dP}{dV} < 0$.

B3 Add meg egyenlettel, és számold is ki numerikusan, hogy a telített vízgőz térfogata legfeljebb hányadrészére csökkenthető túlhűtéssel, azaz határozd meg a $\frac{V_G}{V_{G\min}}$ hányadost! **(0,7 pont)**

Folyadék fázis

A víz folyékony halmazállapotában a van der Waals állapotegyenlet használatakor ésszerű feltételezés, hogy a $P \ll a/V^2$ egyenlőség teljesül.

B4 Fejezd ki a víz V_L móltérfogatát folyadék halmazállapotban az a, b, R , és T mennyiségek segítségével! **(1 pont)**

Feltételezve, hogy $bRT \ll a$, határozd meg a víz következő jellemzőit! *Ne lepődj meg, ha a kapott értékek némelyike nem egyezik a táblázatokban is megtalálható, jól ismert értékekkel!*

B5 Fejezd ki a víz ρ_L sűrűségét folyadék fázisban a μ, a, b, R mennyiségek (némelyikének) segítségével, és határozd meg a sűrűség numerikus értékét is! **(0,3 pont)**

B6 Fejezd ki az $\alpha = \frac{1}{V_L} \frac{\Delta V_L}{\Delta T}$ térfogati hőtágulás együtthatót az a, b, R mennyiségekkel, és add meg az együttható numerikus értékét is! **(0,6 pont)**

B7 Fejezd ki a víz (tömegegységre vonatkoztatott) L párolgáshőjét a μ, a, b, R mennyiségek segítségével, és add meg a párolgáshő numerikus értékét! **(1,1 pont)**

B8 Egyetlen molekula vastagságú vízréteget vizsgálva becsüld meg a víz σ felületi feszültségét! **(1,2 pont)**

C Rész (Part C): Folyadék-gáz rendszer (3 pont)

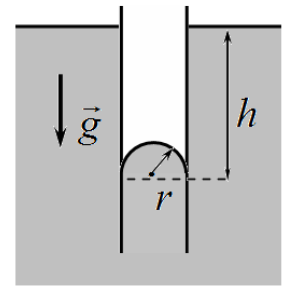
A Maxwell-szabály segítségével (a területek egyenlőségét kifejező egyszerű integrálással), a van der Waals állapotegyenlet felhasználásával valamint a B részben alkalmazott közelítések figyelembevételével megmutatható, hogy a telített vízgőz p_{LG} nyomásának a T hőmérséklettől való függése

$$\ln p_{LG} = A + \frac{B}{T} \quad (3)$$

alakú, ahol az A és B konstansok a következőképpen fejezhetőek ki az a és b paraméterekkel:

$$A = \ln\left(\frac{a}{b^2}\right) - 1; \quad B = -\frac{a}{bR}$$

W. Thomson megmutatta, hogy a telített vízgőz nyomása függ a folyadékfelszín görbületétől is. Tekintsünk ugyanis egy folyadékot, mely nem nedvesíti egy kapilláris cső falát (az illeszkedési szög 180°). Ha a kapillárist a folyadékba merítjük, akkor a folyadékszint a felületi feszültség miatt a csőben lejjebb száll (lásd 3. ábra).



C1	Fejezd ki a görbült folyadékfelszín fölötti telített vízgőz nyomásának kicsiny Δp_T megváltozását a vízgőz ρ_s sűrűsége, a folyadék ρ_L sűrűsége, a σ felületi feszültség valamint a felszín r görbületi sugara segítségével! (1,3 pont)
-----------	--

A B3 részben vizsgált metastabil állapotot sok kísérleti elrendezésben használják, például az elemi részecskék detektálására szolgáló ködkamrában is. A túlhűtött állapot természeti jelenségeknél is megfigyelhető, például a hajnali harmatképződésnél. A túlhűtött vízgőz folyadékcseppeket formálva csapódik ki. A nagyon kis méretű vízcseppek gyorsan elpárolognak, azonban a kellően nagyok tovább növekedhetnek.

3. ábra. A nem nedvesítő folyadékba merülő kapilláris cső.

C2	Tegyük föl, hogy este $t_e = 20^\circ\text{C}$ hőmérsékleten a levegőben levő vízgőz telített, és hajnalra a környezet hőmérséklete kismértékben, $\Delta t = 5,0^\circ\text{C}$ -kal csökken. Feltételezve, hogy a pára nyomása nem változik, becsüld meg azt a minimális sugarat, amelynél nagyobb vízcseppek mérete növekszik! Használd a víz felületi feszültségének irodalmi értékét: $\sigma = 7,3 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$. (1,7 pont)
-----------	---