Két feladat mechanikából (10 pont)

Mielőtt elkezded a feladat megoldását, olvasd el a külön borítékban lévő általános utasításokat!

Part A. Elrejtett korong (3,5 pont)

Tekintsünk egy tömör, fából készült, r_1 sugarú és h_1 vastagságú hengert. A fahenger belsejében valahol a fa anyaga helyett egy $r_2$sugarú és h_2 vastagságú fémkorong található. A fémkorong úgy helyezkedik el, hogy B szimmetriatengelye párhuzamos a fahenger S tengelyével, és ugyanakkora távolságra van a fahenger alsó és felső alaplapjától. Jelöljük S és B távolságát d-vel! A fa sűrűsége ρ_1, a fém sűrűsége pedig $\rho_2 > \rho_1$. A fahenger és a fémkorong össztömege M.

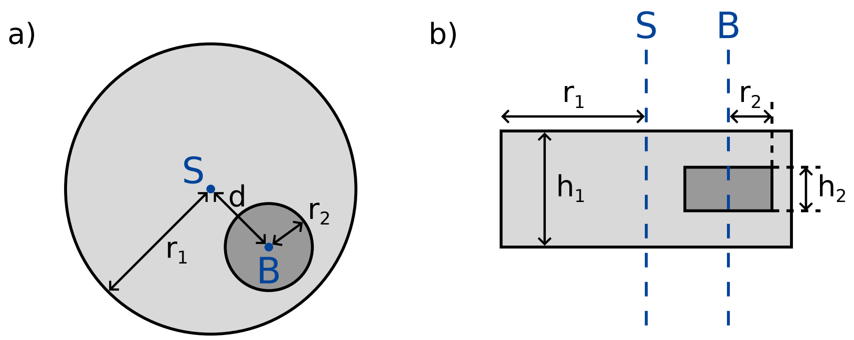
Ebben a részben a fahengert a földre helyezzük, így jobbra és balra szabadon tud gördülni. Az elrendezés oldal- és felülnézetben az 1. ábrán látható.

Ebben a feladatban a fémkorong méretét és helyét kell meghatározni.

A következőkben, ha a választ az ismert mennyiségekkel kell kifejezned, mindig a következőket vedd ismertnek:

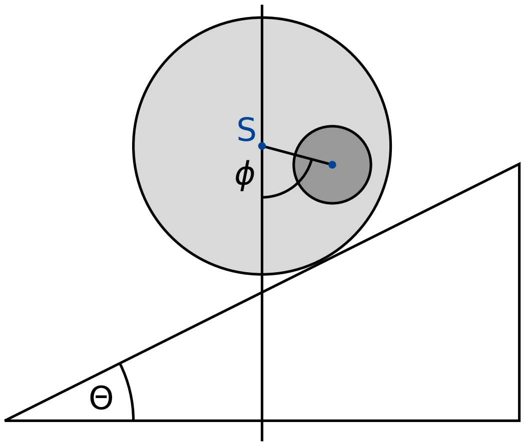
$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\ . \tag{1}$$

A cél r_2, h_2 és d meghatározása indirekt méréseken keresztül.



1. ábra: a) oldalnézet b) felülnézet

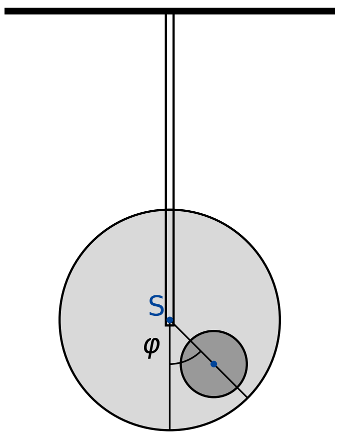
Jelöljük b-vel a teljes rendszer C tömegközéppontjának és a fahenger S szimmetriatengelyének távolságát! Ennek a távolságnak a meghatározásához a következő kísérletet tervezzük: a fahengert vízszintes alapra helyezzük úgy, hogy stabil egyensúlyban legyen. Az alapot lassan megdöntjük Θ szöggel (lásd a 2. ábrát). A tapadási súrlódás miatt a fahenger csúszás nélkül gördülhet. Egy kicsit lejjebb gördül a lejtőn, de végül a stabil egyensúlyi helyzetben megáll ϕ szögelfordulás után, amit megmérünk.



2. ábra: A henger a lejtőn.

A.1	Fejezd ki b-t az (1) mennyiségek, a ϕ szög és a Θ hajlásszög függvényében!	0.8pt

Mostantól fogva feltételezhetjük, hogy b értéke ismert.



3. ábra: Felfüggesztett rendszer.

Következőként szeretnénk megmérni a rendszer I_S tehetetlenségi nyomatékát az S szimmetriatengelyre vonatkoztatva. Ehhez egy mereven rögzített rúddal felfüggesztjük a fahengert a szimmetriatengelyénél. Ezután az egyensúlyi helyzetéből kicsiny φ szöggel kitérítjük, majd elengedjük. Az elrendezést lásd a 3. ábrán. Azt találjuk, hogy φ periodikusan változik T periódusidővel.

A.2	Határozd meg φ mozgásegyenletét! Fejezd ki a henger I_S tehetetlenségi nyomatékát az S szimmetriatengelyére nézve T, b és az (1) ismert mennyiségek segítségével! Feltételezheted, hogy az egyensúlyi helyzettől való kitérés kicsi, így φ végig igen kicsiny,	0.5pt

Az **A.1** és **A.2** részfeladatok mérései alapján szeretnénk meghatározni a fahengerben található fémkorong geometriáját és elhelyezkedését.

A.3	Fejezd ki a d távolságot b és az (1) mennyiségek segítségével. A formuládban az r_2 és h_2 mennyiségeket is használhatod, hiszen ezek a mennyiségek az **A.5** pontban meg lesznek határozva.	0.4pt

A.4	Fejezd ki az I_S tehetetlenségi nyomatékot b és az ismert (1) mennyiségek segítségével. A formuládban az r_2 és h_2 mennyiségeket is használhatod, hiszen ezek a mennyiségek az **A.5** pontban meg lesznek határozva.	0.7pt

A.5	A fenti eredményeket felhasználva fejezd ki h_2 és r_2 értékét b, T és az ismert (1) mennyiségek segítségével. A h_2 mennyiséget kifejezheted r_2-vel is.	1.1pt

Part B. Forgó űrállomás (6,5 pont)

Alice egy űrállomáson lakó űrhajós. Az űrállomás egy óriási, R sugarú kerék, amely a tengelye körül forog, így biztosítva a mesterséges gravitációt az asztronauták számára. Az űrhajósok a kerék peremének belső oldalán élnek. Az űrállomás gravitációs vonzása és a padló görbültsége elhanyagolható.

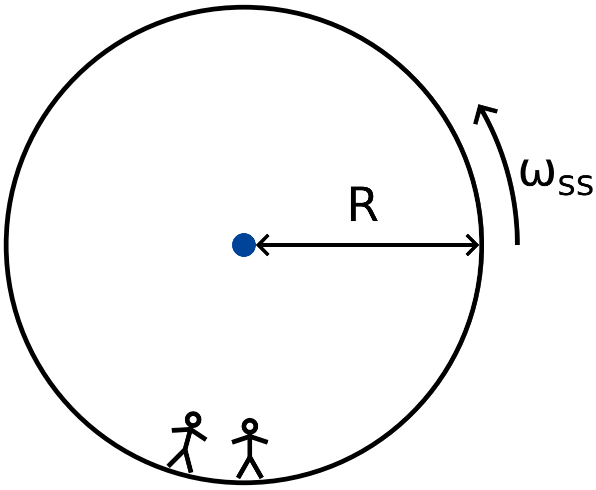
B.1	Mekkora ω_{ss} szögsebességgel forog az űrállomás, ha az űrhajósok ugyanakkora g_E gravitációs gyorsulást éreznek, mint a Föld felszínén?	0.5pt

Alice és űrhajós barátja, Bob vitatkoznak. Bob nem hiszi el, hogy valóban egy űrállomáson élnek, szerinte valójában a Földön. Alice fizikai módszerrel szeretné bebizonyítani Bobnak, hogy egy forgó űrállomáson élnek. Ezért egy m tömegű testet rögzít egy k rugóállandójú rugó végére, majd rezgésbe hozza. A test csak függőleges irányban rezeghet, vízszintesen nem tud mozogni.

B.2	Feltételezve, hogy a Földön a gravitációs gyorsulás állandó g_E, mekkorának mérné a rezgés ω_E körfrekvenciáját egy Földön lévő személy?	0.2pt

B.3	Mekkora ω körfrekvenciát mér Alice az űrállomáson?	0.6pt

Alice meg van győződve arról, hogy a kísérlete bizonyíték arra, hogy egy forgó űrállomáson élnek. Bob szkeptikus marad. Szerinte ha a gravitációs tér Föld felszíne feletti változását is figyelembe vesszük, annak hasonló hatása van. A továbbiakban azt vizsgáljuk, igaza van-e Bobnak.



4. ábra: Az űrállomás

B.4	Fejezd ki a $g_E(h)$ gravitációs gyorsulást kicsiny h magasságban a Föld felszíne fölött, és számítsd ki a rezgő test $\tilde{\omega}_E$ körfrekvenciáját (elég a lineáris közelítés). A Föld sugarát jelölje R_E. A Föld forgását hanyagold el!	0.8pt

Alice azt találja, hogy ezen az űrállomáson a rezgő test valóban a Bob által jósolt frekvenciával rezeg.

B.5	Mekkora az űrállomás R sugara, ha a rezgés ω körfrekvenciája megegyezik a Földön mérhető $\tilde{\omega}_E$ körfrekvenciával? Válaszodat R_E segítségével add meg.	0.3pt

Bob makacsságán feldühödve Alice egy új kísérlettel áll elő saját igazának bizonyítására. Ezért felmászik az űrállomás padlója fölé H magasságba egy toronyra, és elejt egy testet. Ez a kísérlet értelmezhető a forgó vonatkoztatási rendszerben éppúgy, mint az inerciarendszerben.

Egy egyenletesen forgó vonatkoztatási rendszerben az űrhajós egy fiktív $\vec{F}_C$ erőt tapasztal, amit Coriolis-erőnek nevezünk. Az állandó $\vec{\omega}_{ss}$ szögsebességgel forgó rendszerben $\vec{v}$ sebességgel mozgó, m tömegű testre ható $\vec{F}_C$ Coriolis-erőt a következő összefüggés adja meg:

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \, . \tag{2}$$

Használhatod a skaláris mennyiségekre vonatkozó

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \, , \tag{3}$$

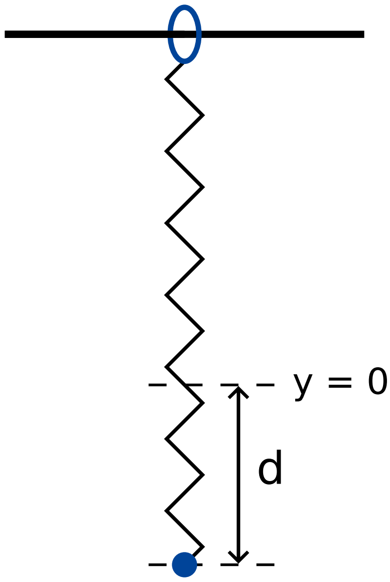
alakot, ahol ϕ a sebességvektor és a forgástengely közötti szög. Az erő merőleges mind a v sebességvektorra, mind pedig a forgástengelyre. Az erő előjele a jobbkézszabály alapján határozható meg, de a következőkben szabadon választhatod.

B.6	Számítsd ki a test v_x vízszintes sebességét és a vízszintes d_x elmozdulását (a torony aljához képest, a toronyra merőleges irányban) a padlót érés pillanatában. Felteheted, hogy a torony H magassága kicsiny, így az űrhajósok által mért gyorsulás az esés alatt állandó. Feltételezheted továbbá, hogy $d_x \ll H$.	1.1pt

Hogy jobb eredményt kapjon, Alice úgy dönt, hogy a kísérletet egy, a korábbinál sokkal magasabb toronyról is elvégzi. Meglepetésére a test a torony aljánál éri el a padlót, azaz $d_x = 0$.

B.7	Határozd meg a torony magasságának alsó korlátját, amelyre $d_x = 0$ lehetséges.	1.3pt

Alice szeretne még egy utolsó kísérletet tenni Bob meggyőzésére. A rugós rendszert szeretné használni a Coriolis-erő hatásának szemléltetésére. Ezért megváltoztatja az eredeti elrendezést: a rugót egy olyan gyűrűhöz rögzíti, amely szabadon és súrlódásmentesen csúszhat az x irányban egy vízszintes rúdon. A rugó maga az y irányban rezeg. A rúd párhuzamos a talajjal és merőleges az űrállomás forgástengelyére. Az xy sík tehát merőleges a forgástengelyre, az y irány pedig egyenesen az űrállomás forgástengelye felé mutat.



5. ábra: Az elrendezés.

B.8	Alice a testet az $x = 0$, $y = 0$ egyensúlyi állapotából d távolsággal kitéríti lefelé, majd elengedi (lásd az 5. ábrát). • Fejezd ki az $x(t)$ és $y(t)$ mennyiségeket. Felteheted, hogy $\omega_{ss} d$ kicsi, és hanyagold el az y irányú Coriolis-erőt. • Vázold fel az $(x(t), y(t))$ pályát, és jelöld minden fontos tulajdonságát, mint pl. az amplitúdó.	1.7pt

Alice és Bob folytatja vitáját.