

## Sötétanyag

Először Fritz Zwicky következtetett a sötétanyag léteire a mintegy ezer galaxisból álló Coma galaxishalmaz dinamikájára vonatkozó megfigyelései alapján. Zwicky a Viriál-tétel segítségével becsülte meg a galaxishalmaz tömegét. Egy egyszerű nap-bolygó rendszerben, ahol a bolygó körpályán kering a nap körül, a Viriál-tétel közvetlen kapcsolatot teremt a bolygó mozgási és gravitációs potenciális energiája között. Azonban általában egy valamilyen kölcsönhatással kötött sokrészecskerendszer esetén a Viriál-tétel a teljes mozgási energia időátlaga és a teljes potenciális energia időátlaga között teremt kapcsolatot.

Zwicky 1993-ban, a Coma galaxishalmaz szélénél levő galaxisok sebességének megfigyelése alapján arra a következtetésre jutott, hogy a galaxishalmaz teljes tömege nagyobb, mint a (galaxisok formájában) megfigyelhető tömege. A látható galaxisok gravitációs vonzása ugyanis túl kevés volt a megfigyelt galaxissebességek létrehozásához. Tehát valamilyen rejtett tömeg jelenléte okozza a nagy sebességet. Ez a rejtett tömeg a sötétanyag tömege. A következőkben feltételezd, hogy a galaxisok tömegét a látható tömegük és a velük együtt mozgó sötétanyag tömegének összege adja, és a sötétanyag a látható anyaggal csak a gravitáción keresztül lép kölcsönhatásba.

### A. Galaxishalmaz

Tekintsünk egy  $R$  sugarú gömb alakú galaxishalmazt, amely nagyszámú,  $N$  galaxisból és sötétanyagból áll, melyek homogén módon töltik ki a gömböt. A halmaz teljes tömege (galaxisok és sötétanyag együtt) legyen  $M$ ! Jelölje a galaxisok átlagos teljes tömegét (látható és sötétanyagból származót együtt)  $m$ !

A.1	Feltételezve, hogy a galaxishalmaz anyaga folytonosan oszlik el, add meg a galaxishalmaz teljes gravitációs potenciális energiáját $M$ és $R$ segítségével!	1.0 pt.
-----	---	---------

Az univerzum általános tágulása miatt a távoli objektumok távolodnak a Földtől, és a távolodás sebessége a Földtől mért távolságuktól függ. A galaxishalmaz  $i$ -dik galaxisában ( $i = 1 \dots N$ ) levő IA típusú szupernova egyik Lyman-frekvenciáját (bizonyos átmenethez tartozó frekvencia a hidrogén emissziós spektrumában) a Földről megfigyelve  $f_i$ -nek látjuk, míg ugyanez a Lyman-frekvencia földi laboratóriumban mérve  $f_0$ .

A.2	Határozd meg a teljes galaxishalmaz Földtől való $V_{cr}$ átlagos távolodási sebességét az $f_i$ (ahol $i = 1 \dots N$ ), $f_0$ és $N$ paraméterekkel kifejezve! Megjegyezzük, hogy a galaxisok sebessége sokkal kisebb a $c$ fénysebességnél.	0.5 pt.
-----	--	---------

A.3	Feltehetjük, hogy a galaxisoknak a galaxishalmaz tömegközéppontjához viszonyított relatív sebessége izotróp (irányfüggetlen). Határozd meg, a galaxishalmaz tömegközéppontjához viszonyítva, a galaxisok sebességének $v_{rms}$ négyzetes középértékét (négyzetek átlagának a négyzetgyökét) az $N$ , $f_i$ (ahol $i = 1 \dots N$ ) és $f_0$ mennyiségekkel kifejezve! Ennek felhasználásával add meg egy galaxis átlagos mozgási energiáját a halmaz tömegközéppontjához viszonyítva a $v_{rms}$ és $m$ mennyiségekkel!	1.5 pt.
-----	--	---------

A galaxishalmaz teljes tömegének meghatározásához a Viriál-tételt használhatjuk. A tétel szerint egy konzervatív erő által kötött részecskerendszerben

$$\langle K \rangle_t = -\gamma \langle U \rangle_t,$$

ahol  $\langle K \rangle_t$  a teljes mozgási energia idő szerinti átlaga,  $\langle U \rangle_t$  a teljes potenciális energia időátlaga,  $\gamma$  pedig egy állandó. A tétel abból a feltevésből vezethető le, hogy a kölcsönhatással kötött rendszerben minden részecske helyvektora és impulzusa véges, ezért a

$$\Gamma = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$$

képlettel definiált mennyiség is véges.

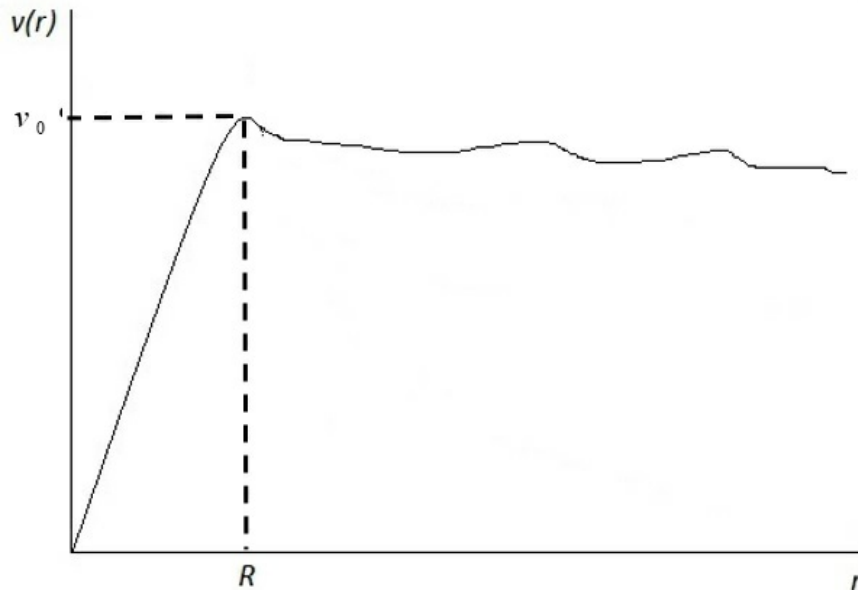
A.4	Felhasználva, hogy a $d\Gamma/dt$ mennyiség hosszú időre vett átlaga zérus, azaz $\langle \frac{d\Gamma}{dt} \rangle_t = 0$ , határozd meg a fenti Viriál-tételben szereplő $\gamma$ állandó értékét gravitációs kölcsönhatás esetében! (Útmutatás: megpróbálhatod a feladatot úgy megoldani, hogy a $\Gamma$ -ban szereplő összegzésnél csak kisszámú galaxist veszel figyelembe.)	1.7 pt.
A.5	Az előző eredmények felhasználásával határozd meg a galaxishalmaz teljes sötétanyag tömegét az $N$ , $m_g$ , $R$ és $v_{rms}$ mennyiségekkel kifejezve, ahol $m_g$ a galaxisok átlagos látható tömege! Megjegyezzük, hogy a sötétanyag sebességének négyzetes középértéke megegyezik a galaxisokéval.	0.5 pt.

## B. Sötétanyag a galaxisban

Sötétanyag jelen van a galaxisokon belül és körülöttük is. Tekintsünk egy gömb alakú galaxist, és legyen a galaxis látható peremének a sugara  $R_g$ . (A látható perem sugara az a legnagyobb sugár, ahol még sok csillag látható. Megjegyezzük, hogy az  $R_g$  sugáron kívül is található néhány csillag.) Tegyük fel, hogy a galaxis csillagjai pontszerű részecskék, melyek átlagos tömege  $m_s$ . Feltételezzük továbbá, hogy a galaxison belül a csillagok körpályán keringenek, homogén módon helyezkednek el, és egységnyi térfogatra eső számuk  $n$ .

B.1	Feltételezve, hogy a galaxis csak csillagokból áll, határozd meg a galaxis középpontjától $r$ távolságban keringő csillagok $v(r)$ sebességét, és vázlatosan ábrázold a $v(r)$ függvényt $r < R_g$ és $r \geq R_g$ esetén!	0.8 pt.
-----	--	---------

A sötétanyag jelenlétére a galaxisokban megfigyelt  $v(r)$  függvény alakjából lehet következtetni. Ezt a függvényt a galaxis forgási görbéjének nevezzük. Az alábbi ábra egy tipikus, megfigyelésből származó forgási görbét mutat. Egyszerűsítésképpen feltételezd, hogy  $v(r)$  lineáris függvény  $r \leq R_g$  esetén, és konstans  $v_0$  értékű  $r \geq R$  esetén.



1. ábra: A galaxisok forgási görbéje a galaxishalmazban.

B.2	Határozd meg a galaxis $R_g$ sugáron belüli részének teljes $m_R$ tömegét a $v_0$ és $R_g$ mennyiségekkel kifejezve!	0.5 pt.
-----	--	---------

A B.2 pont ábrája és a B.1 kérdésben kapott függvény közti eltérés mutatja a sötétanyag jelenlétét.

B.3	Határozd meg a sötétanyag sűrűségét, mint $r$ , $R_g$ , $v_0$ , $n$ és $m_s$ függvényét $r < R_g$ és $r \geq R_g$ esetén!	1.5 pt.
-----	---	---------

### C. Csillagközi gáz és sötétanyag

Most tekintsünk egy fiatal galaxist, amelynek a tömegét főként a csillagközi gáz és a sötétanyag adja (tehát a csillagok tömege elhanyagolható)! A csillagközi gáz azonos,  $m_p$  tömegű részecskékből áll. A gáz  $n(r)$  részecskeszám-sűrűsége, valamint  $T(r)$  hőmérséklete függ a galaxis középpontjától mért  $r$  távolságtól. Bár sok fizikai folyamat megy végbe a csillagközi gázban, feltehetjük, hogy a gáz hidrosztatikai egyensúlyban van, azaz saját nyomása egyensúlyt tart a galaxis gravitációs vonzásával.

C.1	Határozd meg a csillagközi gázban a $dP/dr$ nyomás-gradienst az $m'(r)$ , $r$ és $n(r)$ mennyiségekkel kifejezve! Itt $m'(r)$ az együttes tömege a gáznak és a sötétanyagnak a galaxis középpontja körüli $r$ sugarú gömbön belül.	0.5 pt.
-----	--	---------

C.2	Feltételezve, hogy a csillagközi gáz ideális gáz, fejezd ki az $m'(r)$ függvényt az $n(r)$ , $T(r)$ függvényekkel és $r$ -szerinti deriváltjaikkal!	0.5 pt.
-----	---	---------

Most az egyezőség kedvéért tételezzük fel, hogy a csillagközi gáz hőmérséklete állandó  $T_0$ , és a részecskeszám-sűrűséget a

$$n(r) = \frac{\alpha}{r(\beta + r)^2}$$

formula adja meg, ahol  $\alpha$  és  $\beta$  konstansok!

C.3	Határozd meg a sötétanyag sűrűségét $r$ függvényében a galaxison belül!	1.0 pt.
-----	---	---------