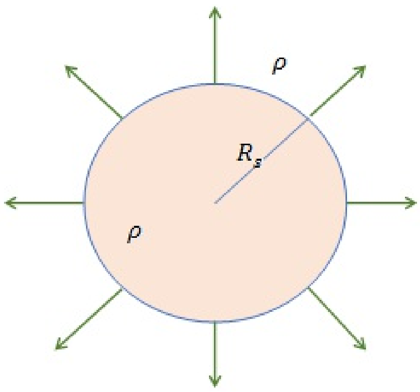
Az Univerzum fejlődése

A Földről megfigyelt galaxisok relatív mozgása miatt az egyes galaxisok látható fény spektrumának hullámhossza az eredeti hullámhossztól eltérő. Ez az elektromágneses Doppler-jelenség. Egy galaxishalmaz esetén a hullámhossz-eltolódások véletlenszerű eloszlását várjuk: valamelyik pozitív (vöröseltolódás), valamelyik negatív (kékeltolódás). Azonban a megfigyelések szerint a közeli galaxisok csoportját leszámítva minden esetben az eltolódás a vörös irányába történik. Ennek igaznak kell lennie akkor is, ha a megfigyelést az Univerzum más pontján végezzük. Ebből az következik, hogy az Univerzum tágul. Másrészt az Univerzum lokális szabálytalanságától 100 Mpc-nél nagyobb távolsági skálákon eltekinthetünk (1 pc = 3,26 fényév). Nagyobb skálákra átlagolva a galaxisok csomósodó eloszlása egyre inkább izotróp (irányfüggetlen) és homogén (helyfüggetlen) lesz. Ezért feltételezhetjük, hogy az Univerzum anyaga egyenletes ϱ tömegsűrűséggel rendelkezik és tágul.

A. Az Univerzum tágulása



Az Univerzum egyszerű modelljének tekintsünk egy táguló, egyenletes sűrűségű gömböt, ami egy sokkal nagyobb sugarú, az előzővel azonos sűrűségű gömbbe van helyezve. Egy adott időpontban a gömb sugara legyen R_S. A gömb tágulását a sugár $R(t)$ időfüggésével adhatjuk meg az $a(t)$ skálafaktorral kifejezve, azaz $R(t) = a(t)R_\mathrm{S}$.

Ha a Newton-féle gravitációs törvényt felhasználjuk az univerzum-modellünkben szereplő gömb felületén egy tömegelem sebességének vizsgálatához, megkaphatjuk az első Friedmann-egyenletet:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = A_1\rho(t) - \frac{kc^2}{R_s^2 a^2(t)}, \qquad (1)$$

ahol k dimenzió nélküli állandó.

A.1	Határozd meg az (1) egyenletben található A_1 állandót!	1.3 pt.

Az eddigi tárgyalás nemrelativisztikus volt. Azonban kiterjeszthető relativisztikus rendszerre is, ha a $\varrho(t)c^2$-et a teljesenergia-sűrűséggel azonosítjuk (ami nem tartalmazza a gravitációs potenciális energiát). Ebben a relativisztikus modellben, felhasználva a termodinamika első főtételét adiabatikus rendszerre, megkapható a második Friedmann-egyenlet:

$$\dot{\rho} + A_2 \left(\rho + \left(\frac{p}{c^2}\right)\right) \frac{\dot{a}}{a} = 0, \tag{2}$$

ahol c a fénysebesség és p pedig a gömbben lévő nyomás.

A.2	Határozd meg a (2) egyenletben található A_2 állandót!	0.9 pt.

Az (1) és (2) egyenletek megoldásához fel kell tételezni valmilyen $p = p(\varrho)$ összefüggést. Legyen ez a $p(t)/c^2 = w\varrho(t)$, ahol w állandó. A $H = \dot{a}/a$ kifejezés a Hubble-paraméter. A paraméterek jelenlegi értékeit rendszerint a 0 alsó index jelöli, tehát t_0, ϱ_0, H_0, a_0, stb. Az egyszerűség kedvéért legyen $a_0 = 1$.

Úgy gondoljuk, hogy az Univerzum egy nagy robbanásban, az Ősrobbanásban (Big-Bang) keletkezett, ami relativisztikus részecskék sugárzásával járt együtt. Az Univerzum a tágulása során lehűl, és a részecskék nemrelativisztikussá válnak benne. Ugyanakkor a legújabb megfigyelések arra utalnak, hogy jelenleg az Univerzumban az állandó kozmológiai energiasűrűség dominál. Foton esetén a foton hullámhossza a skálafaktorral arányosan növekszik, ahogyan az Univerzum tágul.

A.3	A következő három esetben határozd meg w értékét: (i) az univerzumban csak sugárzás található (azaz fotonok), (ii) az univerzumot csak nemrelativisztikus anyag tölti ki és (iii) az univerzumban állandó az energiasűrűség.	0.9 pt.
A.4	A $k = 0$ értékre határozd meg az $a(t)$-t az összes, A.3.-ban említett (i)-(iii) esetre! Az (i) és (ii) esetben az $a(t = 0) = 0$ kezdeti feltételt, míg az (iii) esetben az $a_0 = 1$ feltételt használd!	0.9 pt.

Az (1) egyenletben lévő k állandó az univerzum térbeli geometriájának osztályozására utal. Az értéke lehet $k = +1$ pozitív görbültetű (zárt) univerzumra, $k = 0$ sík (végtelen) univerzumra és $k = -1$ negatív görbületű (nyitott, végtelen) univerzumra. Legyen $\Omega = \varrho/\varrho_c$, ahol $\varrho_c c^2 = H^2/A_1$ a kritikus energiasűrűség. Megjegyezzük, hogy A_1-et az A.1. feladatból kaptuk meg.

A.5	Fejezd ki az (1) egyenletben lévő k-t Ω, H, a és R_0 függvényében!	0.1 pt.

A.6	Milyen tartományba eshet Ω, ha $k = +1$, $k = 0$ és $k = -1$?	0.3 pt.

B. Az inflációs fázis bevezetésének motivációja és annak általános feltételei

A mikrohullámú kozmikus háttérsugárzás (CMB - cosmic microwave background) megfigyelése azt sugallja, hogy jelenleg az Univerzum nagyjából sík. Azonban ha ez igaz, akkor kezdetben az Univerzumnak tökéletesen síknak kellett lennie, ellenkező esetben bármilyen síktól való eltérés előbb-utóbb idővel megnövekedne, ami a jelenlegi sík tulajdonságot elrontaná.

B.1	Határozd meg az $(\Omega(t) - 1)$ időfüggését olyan univerzumra, amelyben a sugárzás, vagy a nemrelativisztikus anyag által dominál (lásd az A.3. feladatot)!	0.4 pt.

Ahhoz, hogy a fenti problémán felülkerekedjünk, az Univerzumnak a korai fejlődési időszakában egy állandó energiasűrűség által dominált perióduson kellene átmennie. Ez egy exponenciális táguláshoz vezet, amit inflációs periódusnak (felfúvódó fázisnak) nevezünk.

B.2	Erre az állandó energiasűrűség által dominált periódusra határozd meg az $(\Omega(t) - 1)$ időfüggését! Tedd fel, hogy $(\Omega(t) - 1) \ll 1$.	0.3 pt.
B.3	Mutasd meg, hogy az infláció feltétele számos feltételt von maga után: negatív nyomást, gyorsuló tágulást ($\ddot{a} > 0$) és Hubble-sugár csökkenést ($\mathrm{d}(aH)^{-1}/\mathrm{d}t < 0$).	0.7 pt.
B.4	Mutasd meg, hogy a Hubble-sugár csökkenésre vonatkozó feltétel kifejezhető az $\varepsilon = -\dot{H}/H^2$ paraméterrel mint $\varepsilon < 1$.	0.2 pt.

Az infláció addig tart, amíg $\varepsilon < 1$, és akkor ér véget, amikor $\varepsilon = 1$. Definiáljuk az N ,,e-szerezési" számot (e-folding number) úgy, hogy $\mathrm{d}N = \mathrm{d}(\ln a) = H\mathrm{d}t$ és $N = 0$ az infláció végén.

C. Homogén eloszlású anyag által létrehozott infláció

Az inflációs periódust létrehozó fizikai rendszerre példa egy olyan univerzum, amiben a homogén eloszlású anyag dominál. Az ilyen anyagot inflatonnak nevezik és egy $\phi(t)$ függvénnyel jellemezhető.

Az anyag dinamikai egyenlete a

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V' \tag{3}$$

kifejezéssel adható meg, ahol $V = V(\phi)$ a potenciálfüggvény, és $V' = \frac{\partial V}{\partial \phi}$. A Hubble-paraméter kielégíti a

$$H^2 = \frac{1}{3M_{\mathrm{pl}}^2}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V\right] \tag{4}$$

egyenletet, ahol M_{pl} egy állandó, amit redukált Planck-tömegnek neveznek. Inflációs periódus akkor alakul ki, amikor elegendő ideig a V potenciális energia dominál a $\dot{\phi}^2/2$ kinetikus energia mellett, azaz a (3) egyenletben lévő, $\ddot{\phi}$-ot tartalmazó tag elhanyagolható. Ezt nevezik ,,slow-roll" (lassan haladó/gördülő) közelítésnek.

Az ε és az $\eta_V = \delta + \varepsilon$ mennyiségeket, ahol $\delta = -\ddot{\phi}/(H\dot{\phi})$, ,,slow-roll" paramétereknek nevezik.

C.1	Közrelítőleg add meg az ε, η_V paraméterek és a $\mathrm{d}N/\mathrm{d}\phi$ kifejezéseit a $V(\phi)$ potenciállal, valamint a potenciál első és második deriváltjával (V' és V'')!	1.7 pt.

D. Infláció egy egyszerű potenciállal

Minden inflációs modell jóslatait össze kell hasonlítani a CBM-ből megfigyelhető megszorításokkal, amelyek a következők: n_s = 0.968 $\pm$ 0.006 és r < 0.12, ahol $r = 16\varepsilon$ és $n_s = 1 + 2\eta_V - 6\varepsilon$ az anyag által dominált inflációs modellben a $\phi = \phi_{start}$ helyen kiértékelve. Tegyük fel, hogy az anyaghoz tartozó potenciál az egyszerű $V(\phi) = \Lambda^4\left(\frac{\phi}{M_{\mathrm{pl}}}\right)^n$, ahol n bármilyen egész és Λ állandó.

D.1	Számítsd ki ϕ_{end}-et az inflációs szakasz végén!	0.5 pt.
D.2	Fejezd ki az r és n_s mennyiségeket az N e-szerezési szám és az n egész függvényében! Becsüld meg n értékét úgy, hogy az r és az n_s mennyiségek a legjobban megközelítsék a megfigyelt értékeket! A számoláshoz használd az $N = 60$ értéket!	0.9 pt.