Polimerszál viszkoelaszticitása (10 pont)

Fontos, hogy a szál ne kerüljön mechanikai feszültség alá a kísérlet elkezdése előtt!
A mérleget rögtön kapcsold be, mert a bemelegedési ideje körülbelül 10 perc. Ne változtass a mérleg beállításán!

Bevezetés

Külső erő hatására a szilárd testek deformálódnak. Kis deformáló erő mellett a deformáció egyenesen arányos az erővel (Hook-törvény), és reverzibilis, azaz az erő megszűnte után a test visszanyeri eredeti alakját.

A jelenség a feszültség és relatív megnyúlás fogalmával írható le kényelmesen. A σ feszültség az egységnyi felületre ható erő, azaz az F erőnek és annak az S felületnek a hányadosa, amin az erő hat. Az ϵ relatív megnyúlás a szál hosszának relatív megváltozása:

$$\sigma = \frac{F}{S} \qquad \text{and} \qquad \epsilon = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} \quad , \tag{1}$$

ahol ℓ és ℓ_0 rendre a szál végső és kezdeti hossza. Egyszerű rugalmas viselkedés esetén a feszültség egyszerűen arányos a relatív megnyúlással, $\sigma = E\,\epsilon$ (Hooke-törvény), ahol az E arányossági tényező a *Young-modulusz.*

A Hooke-törvény csak közelítőleg, elegendően kicsiny feszültségek esetén írja le a rugalmas viselkedést. Nagyobb feszültségek esetén, a plasztikus tartományban, a deformáció fokozatosan irreverzibilissé válik. Ekkor a molekulák mozgása egyre inkább egy viszkózus folyadékra hasonlít. A rugalmassági határnál nagyobb húzó vagy nyomó feszültség mellett a minta aszimptotikusan folyadékká válik.

Viszkoelasztikus anyagok

Bizonyos anyagokban együtt figyelhető meg a rugalmas testekre és a viszkózus folyadékokra jellemző viselkedés, ezért ezeket *viszkoelasztikusnak* nevezzük.

Viszkoelasztikus anyagok vizsgálata során érdemes külön kezelni a tisztán rugalmas viselkedést és a viszkózus viselkedést. Feltételezzük, hogy adott ϵ relatív megnyúlás létrehozásához szükséges σ feszültség a tisztán a rugalmas $\sigma_0 = E_0\,\epsilon_0$ tag és a viszkoelasztikus σ_1 tag összege:

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \tag{2}$$

Mindkét feszültség tag ugyanahhoz a relatív megnyúláshoz tartozik. $(\epsilon = \epsilon_0 = \epsilon_1)$. Ugyanakkor a viszkoelasztikus taghoz tartozó ϵ_1 relatív megnyúlást általában két tag összeégnek tekintjük, az egyik egy tisztán rugalmas deformáció $\epsilon_1^{\mathsf{e}} = \sigma_1/E_1$, a másik pedig egy tisztán viszkózus deformáció ϵ_1^{v}, (mindkettő ugyanahhoz a feszültséghez tartozik $\sigma_1 = \sigma_1^{\mathsf{e}} = \sigma_1^{\mathsf{v}}$).

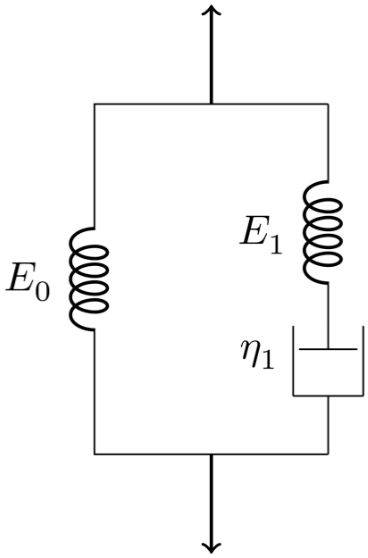
$$\epsilon_1 = \epsilon_1^{\mathsf{e}} + \epsilon_1^{\mathsf{v}} \tag{3}$$

A tisztán viszkózus folyamatban (a viszkózus folyadékokban megfigyelt viselkedéshez hasonlóan) feltételezzük, hogy a feszültség lineáris kapcsolatban áll a relatív megnyúlás idő szerinti deriváltjával,

$$\sigma_1 = \eta_1 \frac{\mathrm{d}\epsilon_1^{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}t},$$

ahol η_1 a viszkozitási együttható.

Ez a fenomenologikus modell a *viszkoelaszticitás* úgynevezett *standard lineáris modellje*, amelyet az 1. ábra mutat. Az ábrán a rugók tisztán rugalmas komponenseket reprezentálnak, míg az edény tisztán viszkózust.



1. Ábra: A viszkoelaszticitás standard lineáris modellje.

Az eddigiekből a következő egyenlet adódik:

$$\frac{\mathrm{d}\epsilon_1}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{E_1}\frac{\mathrm{d}\sigma_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\sigma_1}{\eta_1} \tag{4}$$

Így a viszkoelaszticitás standard modelljének keretein belül levezethető, hogy:

$$\sigma = E_0\,\epsilon + \tau_1(E_0 + E_1)\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}t} - \tau_1\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} \tag{5}$$

ahol $\tau_1 = \eta_1/E_1$. Ebből a differenciálegyenletből látható, hogy a feszültség és a relatív megnyúlás közötti kapcsolat már nem lineáris, és mind a relatív megnyúlás, mind a feszültség általában függ az időtől. Az $\epsilon(t)$ függvény meghatározásához szükség van az $\sigma(t)$ függvényre és viszont.

A gyakorlatban az a két eset fontos, amikor vagy $\mathrm{d}\epsilon/\mathrm{d}t = 0$ vagy $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t = 0$. Az első esetben *feszültség alatti relaxációról*, míg a második esetben *kúszásról* beszélünk. Feszültség alatti relaxáció során hirtelen adott

ϵ relatív megnyúlást hozunk létre a mintán, amit aztán nem változtatunk meg, tehát $\mathrm{d}\epsilon/\mathrm{d}t = 0$. Ekkor a $\sigma(t)$ függvény már csak a minta viszkoelasztikus jellemzőitől függ, és az (5) egyenletet megoldása:

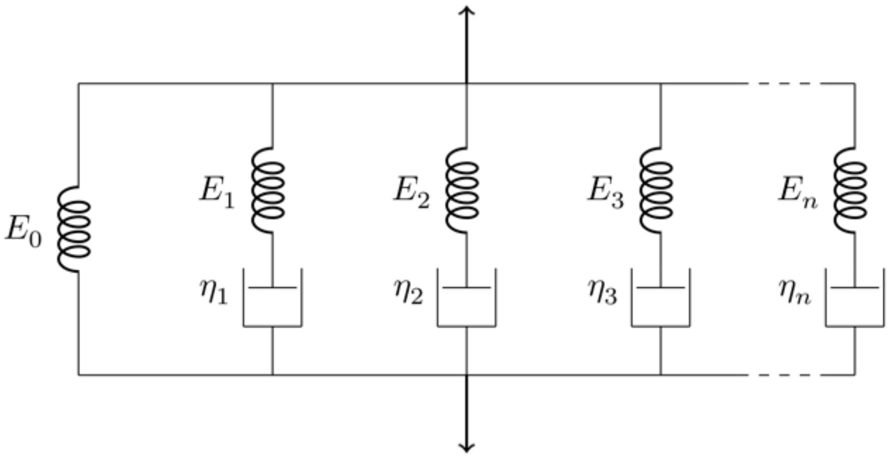
$$\sigma(t) = \epsilon(E_0 + E_1 \mathrm{e}^{-t/\tau_1}) \tag{6}$$

feltételezve, hogy a $t = 0$ pillanatban csak a rugalmas komponensek adnak járulékot a feszültséghez, tehát

$\sigma(t = 0) = \epsilon(E_0 + E_1)$. A megoldásból látszik, hogy a viszkoelasztikus feszültség az időben exponenciálisan csökken, τ_1 időállandóval.

Többszörös viszkoelasztikus folyamatok

A viszkoelaszticitás standard lineáris modellje a 2. ábrán látható módon terjeszthető ki több relaxációs időre.



2. ábra: A többszörös viszkoelaszticitás modellje.

N különböző viszkoelasztikus komponenst feltételezve,

$$\sigma = \sigma_0 + \sum_k \sigma_k, \quad k = 1, 2, \cdots, N \tag{7}$$

ahol $\frac{\mathrm{d}\epsilon_k}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{E_k}\frac{\mathrm{d}\sigma_k}{\mathrm{d}t} + \frac{\sigma_k}{\eta_k}$, és, az előzőkhöz hasonlóan, $\frac{\mathrm{d}\epsilon_0}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\epsilon_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}t}$.

Így az (5) egyenlet következő általánosítása adódik:

$$\sigma = E_0\epsilon + \eta_t\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}t} - \sum_k \tau_k\frac{\mathrm{d}\sigma_k}{\mathrm{d}t}, \quad k = 1, 2, \cdots, N \tag{8}$$

ahol $\eta_t = \sum_k \eta_k$, és $\tau_k = \eta_k/E_k$.

Állandó relatív megnyúlás mellett a különböző viszkoelasztikus feszültségek most is időben exponenciálisan csökkennek, $\sigma_k = A_k \mathrm{e}^{-t/\tau_k}$, így a következő megoldás adódik:

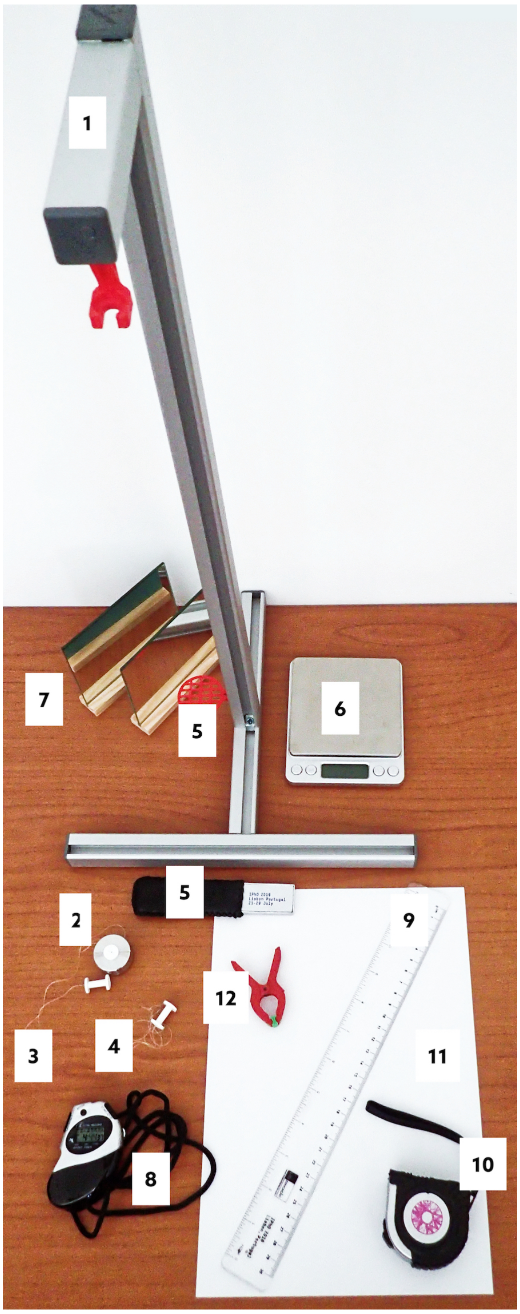
$$\sigma(t) = \epsilon \left(E_0 + \sum_k E_k \mathrm{e}^{-t/\tau_k} \right), \quad k = 1, 2, \cdots, N \tag{9}$$

ahol feltételeztük, hogy a $t = 0$ időpillanatban csak a rugalmas komponensek adnak járulékot a teljes feszültséghez, tehát $\sigma_0 = \epsilon(E_0 + \sum_k E_k)$. Nyilvánvaló, hogy a minta viszkoelasztikus válasza nem lineáris.

Eszközök

A mérések elvégzéséhez a következő eszközökre lesz szükség (lásd: 3. ábra)

1. 1 Állvány, mely egy lézer pointer rögzítésére, valamint a szál függőleges megfeszítésére szolgál.
2. 1 hengeres fém súly, melynek furatába a szál rögzítésére alkalmas csavar helyezhető.
3. 1 hosszú termoplasztikus poliuretán (TPU) szál, melynek egyik végén található csavar a súlyhoz, másik végén található csavar az állvány felső pontjához rögzíthető.
4. 1 rövid TPU szál, mely egyetlen csavarhoz csatlakozik.
5. 1 lézer pointer és tartója
6. 1 digitális mérleg
7. 2 síktükör
8. 1 stopperóra
9. 1 vonalzó
10. 1 fém mérőszalag
11. 1 A4-es papír, mely ernyőként szolgál
12. 1 rugós csipesz a lézer rögzítésére és bekapcsolására



3. ábra. A mérési feladathoz szükséges eszközök

A Rész: Relaxációs mérések (1.9 pont)

Figyelem! A szálakat ne feszítsd meg a kísérlet megkezdése előtt! Amennyiben a szál véletlenül mégis megfeszült a mérés megkezdése előtt, akkor kérj újat! (Azonban ez a csere idővesztéshez vezet.)
Ennek a részfeladatnak az elkezdése előtt gondosan olvasd el a "D Rész: Adatelemzés" fejezetet, hogy előre megtervezhesd a mérést.

A.1	Mérd meg a szál nyújtatlan hosszát a két csavarfej között! A szál csavarfejekben haladó részét is tartalmazó ℓ_0 teljes nyújtatlan szálhosszt úgy számolhatod ki, hogy a lemért hosszhoz mindkét csavarfej esetén 5 mm-t hozzáadsz. Írd a válaszlapra az ℓ_0 hossz mért értékét és hibáját!	0.3pt

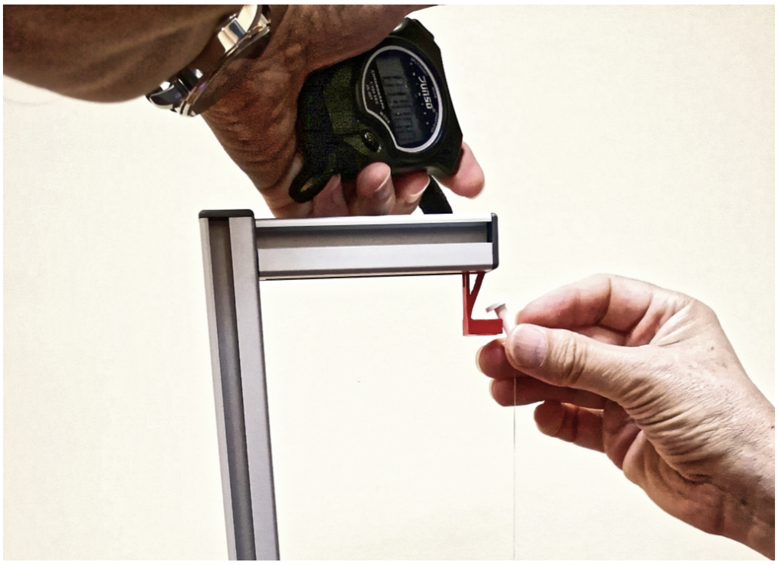
A.2	Mérd meg a feszítő súly és a rögzítő csavar együttes P_0 súlyát pond, azaz gram-force (gf) egységben! Tájékoztatásul, 1 gram-force erő megegyezik 1 gram tömegű test súlyával, ($1\,$gf $= 9.80 \times 10^{-3}\,$N). Írd a válaszlapra a mért eredményt és annak becsült hibáját!	0.3pt

A különböző relaxációs komponensek kísérleti meghatározásához a feszültséget elegendően hosszú időn keresztül kell vizsgálni. Jelen esetben elegendő nagyjából **45 percen keresztül** végezni a vizsgálatot.

A következőkben egyszerre két dolgot kell majd végezned (1. és 2.). Figyelmesen olvasd el az utasításokat a mérés elkezdése előtt!
Fontos: A kísérlet (bármilyen okból történő) félbeszakadása helyreállíthatatlan következményekkel jár. Ez esetben a mérést újra kell kezdeni egy új szállal, amit külön kell kérni.

A következőket végezd el egyszerre:

1. A feszítő súlyt tartsd a mérleg lapján, és feszítsd meg a szálat úgy, hogy a szál másik végén levő tartó csavart a 4. ábrán látható módon a tartóállvány tetejéhez rögzíted!
2. A szál megfeszítésével egyidőben indítsd el a stoppert!



4. ábra: A szál rögzítése és a stopperóra elindítása.

A.3	Nagyjából 45 percen keresztül olvasd le a mérleg által mutatott $P(t)$ értékeket valamint a hozzájuk tartozó t időket, és az adatokat írd a válaszlapon levő táblázatba!	1.0pt

A.4	Mérd meg a megfeszített szál ℓ hosszát, és becsüld meg a mérés hibáját! Írd a válaszlapra ℓ mért értékét és annak hibáját!	0.3pt

B Rész: A megfeszített szál átmérőjének mérése (1.5 pont)

Soha ne nézz közvetlenül a lézerbe! Ha nem használod, kapcsold ki a lézermutatót!
Ha nem sikerül elhajlási képet létrehoznod, kérj egy új lézert!

Ebben a részben fényelhajlás segítségével kell meghatároznod a polimerszál átmérőjét. A nyújtatan szál névleges átmérője 0.5 mm. Talán tudod, hogy egy d szélességű, téglalap alakú rés elhajlási képe ugyanolyan, mint egy ugyancsak d átmérőjű, hengeres tárgyé. A távoli (Fraunhofer) tartományban, azaz ha a szál–ernyő távolság jóval nagyobb a szál átmérőjénél, a diffrakciós mintázat minimumhelyei (kis eltérülési szögek esetén) a

$$d \sin \theta = n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \cdots, \tag{10}$$

egyenlettel írhatóak le, ahol θ az eltérülési szög.

A mérésben használt lézer hullámhossza: $\lambda = 650 \pm 10$ nm.

Ebben a részben a következőképpen járj el:

1. A rugós csipesz segítségével kapcsold be a lézert! (5. ábra.)
2. Állítsd be a lézert úgy, hogy fénysugara eltalálja a megfeszített szálat!

3. A rendelkezésedre álló eszközökkel dolgozz ki módszert az elhajlási kép papír ernyőre való kivetítésére és a (10) egyenlet segítségével a szál átmérőjének meghatározásához szükséges adatok megmérésére!

5. ábra: A lézer bekapcsolása a rugós csipesz segítségével.

B.1	Mérési elrendezésedet vázold a válaszlapon!	0.6pt

B.2	Mérd meg a szál és a kivetített elhajlási kép közötti D optikai távolságot! Az eredményt és annak becsült hibáját írd a válaszlapra!	0.3pt

B.3	Határozd meg az elhajlási minimumok közötti $\bar{x}$ átlagos távolságot és annak hibáját, és eredményeidet írd a válaszlapra!	0.3pt

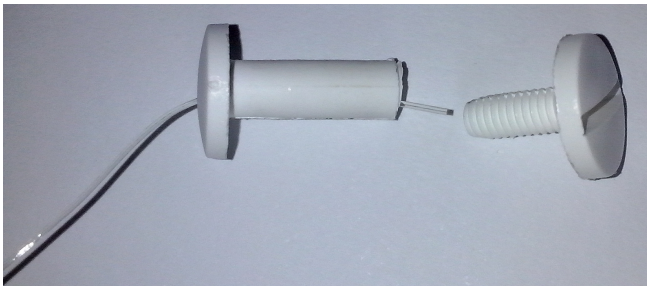
B.4	A (10) egyenletet alkalmazva mérési eredményeidre határozd meg a megfeszített polimerszál d átmérőjét és az átmérő hibáját! Eredményeidet írd be a válaszlapra!	0.3pt

C Rész: A szál cseréje (0.3 pont)

Mielőtt rátérnél az adatok feldolgozására (**D Rész**), elő kell készítened a rövidebb szállal végzendő mérést (**E Rész).**

Távolítsd el a feszítő súlyt a hosszabb szálról (csavard szét a csavart), és rögzítsd a súlyt a rövidebb szál szabad végére. (Fűzd át a szálat a csavar lukas részén, és csavard össze a csavart, a 6. ábrán látható módon!)

Ha nem sikerül átfűznöd a szálat a lukas csavaron, akkor kérj segítséget!



6. ábra: A TPU szál rögzítése a csavarhoz.

C.1	Az **A.1** részben leírtaknak megfelelően mérd meg a szál ℓ_0' feszítetlen hosszát! Eredményedet és annak becsült hibáját írd a válaszapra!	0.3pt

Függeszd föl a szálat a tartóra úgy, hogy a súly konstans feszültséggel húzza! Amíg az adatok feldolgozásán dolgozol, a szál lassan eléri a stacionárius alakváltozást, $\epsilon = \sigma/E$. **(Legalább 30 perc szükséges a stacionárius állapot eléréséhez.)**

D Rész: Adatfeldolgozás (5.7 pont)

N.B.: A gravitációs gyorsulás Lisszabonban: $g = 9.80058\ \mathrm{ms}^{-2}$.

D.1	Számítsd ki a szálban ébredő F erőt gf egységben, minden adatpont esetén, és töltsd ki az A.3. feladatban használt táblázat megfelelő oszlopát!	0.3pt

D.2	Ábrázold az $F(t)$ függvényt a válaszlap megfelelő diagramfelületén!	0.4pt

Mivel a mérleg felülete nem mozdult el, a megnyúlást tekinthetjük konstansnak a mérés során, és használhatjuk a (9)-es egyenletet.

A $\frac{\sigma}{\epsilon}$arány felírható $\frac{\sigma}{\epsilon} = \beta F$ formában, ahol β egy állandó. Tehát,

$$\frac{\sigma}{\epsilon} = \beta F(t) = E_0 + E_1 \mathrm{e}^{-t/\tau_1} + E_2 \mathrm{e}^{-t/\tau_2} + E_3 \mathrm{e}^{-t/\tau_3} + ... \tag{11}$$

ahol a $(\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > ...)$ konvenciót alkalmazzuk.

D.3	Határozd meg a konstans relatív megnyúlás ϵ értékét és hibáját! Az eredményeket írd a válaszlapra!	0.3pt

D.4	Számítsd ki a β faktor értékét úgy, hogy σ SI egységben van Fpedig gf egységben! Az eredményt írd a válaszlapra! (hibaszámítás nem szükséges)	0.3pt

D.5	Vizsgáld a D.2. feladatban használt diagram adatait! Ezek nem értelmezhetőek az anyag tisztán rugalmas viselkedésével. Ábrázold a válaszlap grafikonján azt az $F(t)$ függvényt, amit az anyag tisztán rugalmas viselkedése esetén várnánk!	0.4pt

A méréskiértékelés egyszerűbb, ha a $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ függvényt vizsgáljuk $F(t)$ helyett. A relaxációs paraméterek könnyen kifejezhetőek egymást követő lépésekben. Hogy ezt megtehessük, a $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ időderiváltat ki kell számítanunk minden adatpont esetén. Ezt megtehetjük grafikusan, vagy numerikusan is. Abban az esetben, ha az adatpontokat egyenlő időközönként vettük fel, az $f(t)$ derivált függvény értéke egy adott t_i pontban $(t_1, f_1), (t_2, f_2), (t_3, f_3), \cdots$, elrendezésben megközelítőleg az alábbiak szerint adható meg:

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \qquad i = 2, \cdots, N-1 \tag{12}$$

ahol h az intervallumok (konstans) hossza, és N az adatpontok száma.

Ha az adatpontok távolsága nem egyenlő, a derivált függvény értékeit megközelítőleg a következő összefüggés adja meg:

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_i = \frac{h_-^2 f_{i+1} - h_+^2 f_{i-1} + (h_+^2 - h_-^2) f_i}{h_+^2 h_- + h_+ h_-^2} \qquad i = 2, \cdots, N-1 \tag{13}$$

ahol $h_+ = (t_{i+1} - t_i)$ és $h_- = (t_i - t_{i-1})$, az adatpontok száma pedig N. Ez a kifejezés a bal és a jobb oldali derivált átlagát adja meg, súlyozva az időintervallumok inverzével.

Az adatkiértékelés érdekében az alábbi lépéseket kell végrehajtanunk. A (11)-es kifejezés ismeretében végezzük el a következőket:

D.6	Feltételezzük, hogy a mérés teljes ideje hosszabb, mint τ_2 . Számítsuk ki a $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ derivált értékeit a $t > 1000$ s adatpontok esetén. Rögzítsd az adatokat az A.3. részben használt táblázatban! Ha grafikus módszert használsz a derivált függvény értékeinek meghatározására, használd a válaszlapon található grafikont!	0.5pt

D.7	Írd fel a válaszlapra a $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ -et megadó összefüggést, ha csak egy viszkoelasztikus folyamat van a rendszerben.	0.3pt

D.8	Grafikus módszerrel fejezd ki E_1 és τ_1 paramétereket SI egységekben a D.6. részben kiválasztott adatpontok felhasználásával! A kapott eredményeket tüntesd fel a válaszlapon! (hibaszámítás nem szükséges)	1.0pt

D.9	Fejezd ki az E_0 paramétert SI mértékrendszerben a D.6. részben kiválasztott adatpontok felhasználásával! A kapott eredményt tüntesd fel a válaszlapon! (hibaszámítás nem szükséges)	0.3pt

D.10	Töltsd ki az **A.3** feladatban használt táblázat $y(t)$ oszlopát az elasztikus konstans és a legnagyobb viszkoelasztikus tag kivonásával! (A D.6. részben használt pontokat itt nem kell figyelembe venni)	0.3pt

D.11	Grafikus módszerrel határozd meg $y(t)$ -ből az E_2 második viszkoelasztikus együtthatót (lásd **D.10**) és τ_2-t , SI mértékrendszerben! Írd be E_2 -t és τ_2-t a válaszlapra (hibabecslés nélkül).	1.0pt

A további viszkoelasztikus komponensesek is hasonló módon határozhatóak meg.

D.12	Add meg a harmadik komponens meghatározásához szükséges $[t_\mathrm{i}, t_\mathrm{f}]$ időablakot! Írd be t_i és t_f értékét a válaszlapra (hibabecslés nélkül).	0.3pt

D.13	A **D.11.** grafikon felhasználásával becsüld meg a τ_3 értékét SI egységben. Eredményedet írd a válaszlapra hibabecslés nélkül!	0.3pt

E Rész: *E* mérése állandó feszültség mellett. (1.5 pont)

Térj vissza a rövidebbik szálhoz, amelyet a C feladatban függesztettél fel. Feltételezhetjük, hogy a szál megnyúlása állandósult. $\epsilon = \sigma/E$.

E.1	Határozd meg E -t közvetlenül a megnyújtott szál hossza alapján! Az eredményt írd a válaszlapra! Írd le a relatív eltérés mértékét is E_0 -tól, amelyet a D feladatban határoztál meg. (hibaszámítás nem szükséges).	0.6pt