LIGO-GW150914 (10 pont)

A Földön keresztülhaladó gravitációs hullámokat (gravitational wave, GW) először a LIGO obszervatóriumban észlelték 2015-ben. A GW150904-nek elnevezett eseményt két egymás körül közelítőleg körpályán keringő fekete lyuk által keltett gravitációs hullámok váltották ki. Ebben a feladatban ennek a fekete lyuk rendszernek néhány fizikai paraméterét kell megbecsülnöd az észlelt jelek alapján.

A Rész: Newtoni (konzervatív) pályák (3.0 pont)

A.1 Tekintsünk egy két csillagból álló rendszert, ahol a csillagok tömege M_1, M_2, pozíciójuk pedig a tömegközépponti rendszerben $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, tehát **1.0pt**

$$M_1\vec{r}_1 + M_2\vec{r}_2 = 0\,. \tag{1}$$

A két csillag el van szigetelve a világegyetem többi részétől, és nem relativisztikus sebességgel mozog. A Newton-törvények segítségével az M_1 tömeg gyorsulás vektora kifejezhető a

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = -\alpha\frac{\vec{r}_1}{r_1^n}\,, \tag{2}$$

alakban, ahol $r_1 = |\vec{r}_1|, r_2 = |\vec{r}_2|$. Határozd meg az $n \in \mathbb{N}$ és az $\alpha = \alpha(G, M_1, M_2)$ mennyiségeket, ahol G a gravitációs állandó [$G \simeq 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$].

A.2 Körpályák esetén a két tömegpont rendszer teljes energiája **1.0pt**

$$E = A(\mu, \Omega, L) - G\frac{M\mu}{L}\,, \tag{3}$$

alakú, ahol

$$\mu \equiv \frac{M_1M_2}{M_1+M_2}\,, \qquad M \equiv M_1 + M_2\,, \tag{4}$$

rendre a rendszer *redukát tömege* és *teljes tömege*, Ω mindkét tömegpontnak a szögsebessége, L pedig a tömegpontok egymástól mért távolsága, $L = r_1 + r_2$. Határozd meg az $A(\mu, \Omega, L)$ együttható konkrét alakját!

A.3 A (3) egyenlet az $E = \beta G\frac{M\mu}{L}$ egyszerűbb alakban is felírható. Határozd meg a β számot! **1.0pt**

B Rész: A relativisztikus disszipáció figyelembevétele (7.0 pont)

A gravitáció pontos leírását Einstein adta meg 1915-ben az *Általános Relativitáselméletben*, ami szerint a gravitációs hatás fénysebességgel terjed. A gravitációs kölcsönhatás közvetítői a gravitációs hullámok, GW-k (gravitational waves). A GW-ket gyorsuló tömegek bocsátják ki, miközben a kibocsátó rendszer energiája csökken.

Tekintsünk egy két tömegpontból álló rendszert, ami el van szigetelve a világegyetem többi részétől.

Einstein megmutatta, hogy elegendően kis sebességek esetén a kibocsátott GW-kre teljesül, hogy: 1) frekvenciájuk a tömegpontok keringési frekvenciájának kétszerese; 2) a rendszer gravitációs luminozitását, tehát a gravitációs hullámok formájában kibocsátott $\mathcal{P}$ teljesítményt az Einstein-féle kvadrupól formulával leírható tag dominálja:

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5c^5} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\mathrm{d}^3 Q_{ij}}{\mathrm{d}t^3} \right) \left(\frac{\mathrm{d}^3 Q_{ij}}{\mathrm{d}t^3} \right) . \tag{5}$$

Itt c a fénysebesség, $c \simeq 3 \times 10^8$ m/s. Egy két, egymáskörül az $x-y$ síkban keringő tömegpontból álló rendszer esetén a Q_{ij} elemeket a következő táblázat adja meg (i, j a sor, oszlop indexek):

$$Q_{11} = \sum_{A=1}^{2} \frac{M_A}{3} \left(2x_A^2 - y_A^2 \right) , \qquad Q_{22} = \sum_{A=1}^{2} \frac{M_A}{3} \left(2y_A^2 - x_A^2 \right) , \qquad Q_{33} = -\sum_{A=1}^{2} \frac{M_A}{3} (x_A^2 + y_A^2) , \tag{6}$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \sum_{A=1}^{2} M_A x_A y_A , \tag{7}$$

és $Q_{ij} = 0$ minden más esetben. A képletekben (x_A, y_A) az A tömegpont pozíciója a tömegközépponti koordináta-rendszerben.

B.1 Az A.2 részfeladatban szereplő körpályák esetében a Q_{ij} elemek a következő alakban adhatóak meg a t idő függvényében: 1.0pt

$$Q_{ii} = \frac{\mu L^2}{2} \left(a_i + b_i \cos kt \right) , \qquad Q_{ij} \overset{i \neq j}{=} \frac{\mu L^2}{2} c_{ij} \sin kt . \tag{8}$$

Határozd meg k-t Ω függvényében, valamint add meg az a_i, b_i, c_{ij} állandók számértékét!

B.2 Számold ki a vizsgált rendszer által gravitációs hullámok formájában kibocsátott $\mathcal{P}$ teljesítményt, és az eredményt írd fel 1.0pt

$$\mathcal{P} = \xi \frac{G}{c^5} \mu^2 L^4 \Omega^6 . \tag{9}$$

alakban! Mennyi a ξ együttható értéke? [Ha nem tudod meghatározni ξ-t, akkor a következőkben használd a $\xi = 6.4$ értéket!]

B.3 GW-k kibocsátásának hiányában a két tömegpont végtelen hosszú időn keresztül állandó körpályán kering egymás körül. 1.0pt

Azonban a GW-k kibocsátásával a rendszer energiája csökken, és ennek következtében lassan csökken a körpályák sugara is.

Mutasd meg, hogy a keringési szögsebesség $\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}$ változási sebessége az

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} \right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} \left(G M_\mathrm{c} \right)^5 , \tag{10}$$

egyenlettel írható le, ahol M_c az úgynevezett *chirp tömeg*. Add meg M_c-t M és μ függvényeként! Ez a tömeg határozza meg a keringési frekvenciának a pályasugár csökkenésével járó növekedését. [A „chirp”, magyarul „csiripelés” elnevezést a magas, növekvő frekvenciájú jel madárfiókák csiripeléshez való hasonlósága indokolja.]

B.4 Az előzőek alapján add meg a kapcsolatot az Ω keringési szögsebesség és a GW-ek f_{GW} frekvenciája között! Ismert, hogy ha egy sima $F(t)$ függvényre $a \neq 1$ esetén teljesül, hogy **2.0pt**

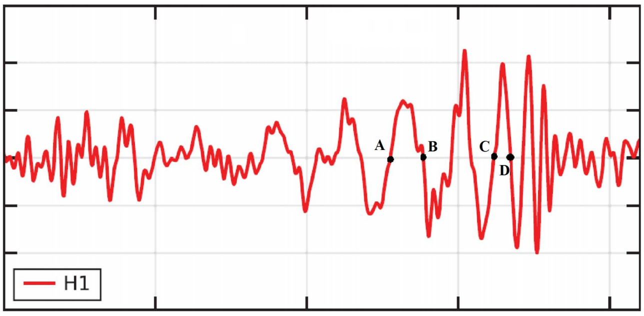
$$\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = \chi F(t)^a \qquad \Rightarrow \qquad F(t)^{1-a} = \chi(1-a)(t-t_0)\ , \tag{11}$$

ahol χ konstans, és t_0 egy másik (integrálási) állandó. Ezt használva mutasd meg, hogy a (10) formulából a GW-k frekvenciájára a

$$f_{\text{GW}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3}\xi\left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{(2/3)+p}(t_0-t)^{2-p} \tag{12}$$

formula adódik, és határozd meg a p állandót!

2015. szeptember 14-én a LIGO, ami két 4 km hosszú, L alakban elhelyezkedő karból áll, észlelte a GW150914 jelet. A karok relatív hossza az 1. ábrán látható módon változott meg. A detektor karjai egyenesen arányosan reagálnak az áthaladó gravitációs hullámra, így az észlelt jel alakja hasonló a gravitációs hullám formájához. A hullámokat két egymás körül közelítőleg kör alakú pályán keringő fekete lyuk keltette; a gravitációs sugárzás miatti energiacsökkenés a pályák sugarának csökkenéséhez és végül a két fekete lyuk ütközéséhez vezetett. Az 1. ábrán az ütközés pillanata nagyjából a jel D pont utáni csúcsánál van.



1. Ábra: A LIGO detektor karjainak relatív hosszváltozása, H1. A vízszintes tengelyen az idő van, és az A, B, C, D pontok rendre a $t = 0.000, 0.009, 0.034, 0.040$ másodperchez tartoznak.

B.5 Az ábra alapján határozd meg az $f_{\text{GW}}(t)$ frekvenciát a **1.0pt**

$$t_{\overline{\text{AB}}} = \frac{t_{\text{B}} + t_{\text{A}}}{2} \qquad \text{és} \qquad t_{\overline{\text{CD}}} = \frac{t_{\text{D}} + t_{\text{C}}}{2} \tag{13}$$

időpillanatokban! Feltételezve, hogy a (12) formula alkalmazható egészen az ütközés pillanatáig (ami szigorúan véve nem igaz), és feltételezve, hogy a két fekete lyuk tömege azonos, becsüld meg a rendszer M_c chirp tömeget és teljes tömegét naptömeg, azaz $M_\odot \simeq 2 \times 10^{30}$ kg egységben!

B.6	Becsüld meg a két fekete lyuk minimális távolságát a $t_{\overline{\text{CD}}}$ időpillanatban! Ennek alapján adj egy R_{max} felső korlátot az objektumok sugarára! Vesd össze a kapott eredményt a Nap $R_{\odot} \simeq 7 \times 10^5$ km sugarával, azaz add meg az $R_{\odot}/R_{\text{max}}$ arányt! Ezután határozd meg a vizsgált pillanatban az objektumok v_{col} keringési sebességét is, és hasonlítsd ezt a fénysebességhez, azaz add meg v_{col}/c-t!	1.0pt

Végső következtetésként levonhatjuk, hogy a rendszert alkotó testek valóban nagyon gyorsan mozgó, nagyon kompakt objektumok!