

Élő rendszerek fizikája (10 pont)

Adat: a normál légköri nyomás: $P_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ mmHg}$

Part A. A vér áramlásának fizikája (4,5 pont)

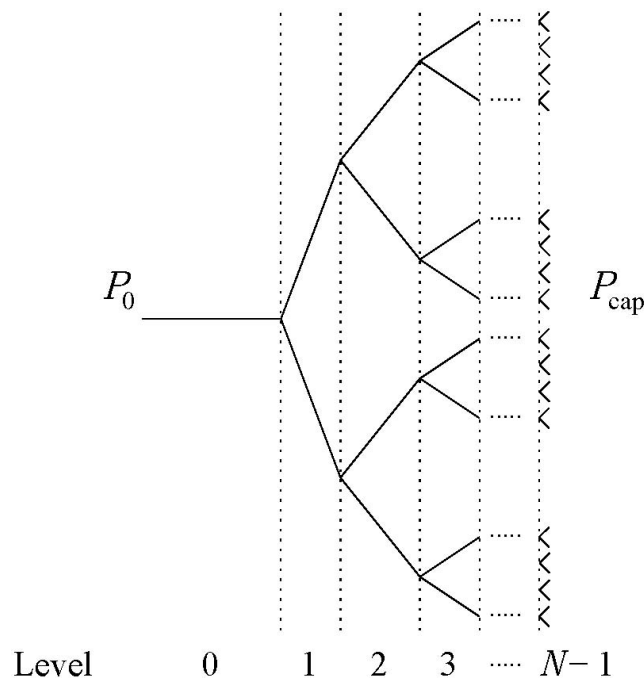
Ebben a részben az erekben történő véráramlás két egyszerűsített modelljét fogod vizsgálni.

A vérerek közelítőleg hengerek. Az összenyomhatatlan folyadékok lamináris (nem turbulens), stacionárius áramlásánál egy merev falú, hengeres csőben a cső két végén lévő nyomás különbsége a következő kifejezéssel adható meg:

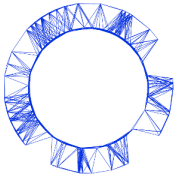
$$\Delta P = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4} Q, \quad (1)$$

ahol ℓ és r a hengeres cső hossza és sugara, η a folyadék viszkozitása és Q a térfogatáramerősség, azaz a cső keresztmetszetén időegység alatt átáramló folyadék térfogata. Ez a kifejezés gyakran helyesen megadja a nyomáskülönbség nagyságrendjét, annak ellenére, hogy nem vesszük figyelembe a vér lüktető áramlását, az erek összenyomhatóságát és szabálytalan alakját, valamint a tényt, hogy a vér nem egy egyszerű folyadék, hanem sejtek és a vérplazma keveréke. Ráadásul ez a kifejezés ugyanolyan alakú, mint az Ohm-törvény, ahol a térfogatáramerősséget az elektromos áramerősség helyettesíti, a nyomáskülönbséget az elektromos feszültség, az $R = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4}$ tényezőt pedig az ellenállás.

Tekintsük példa képpen kis ütőerek (arterioles) 1. ábrán látható szimmetrikus hálózatát - ezek szállítják a vért egy szövet hajszálérrendszeréhez (kapillárisaihoz). Ebben a hálózatban minden egyes bifurkációban az ér szétágazik két egyforma érre. Azonban a magasabb szintű erek vékonyabbak és rövidebbek: tételezzük fel, hogy két egymásutáni, i . és $i + 1$. szint ereinek sugara és hossza ilyen kapcsolatban van: $r_{i+1} = r_i/2^{1/3}$ és $\ell_{i+1} = \ell_i/2^{1/3}$.



1. ábra: A kis ütőerek (arterioles) hálózata



A.1 Írj fel egy kifejezést az i . szinten lévő ér Q_i térfogatáramerősségére a szintek N számának, az η viszkozitásnak, az első ér r_0 sugárnak és ℓ_0 hosszának, valamint $\Delta P = P_0 - P_{\text{cap}}$ -nek (azaz a 0. szintű érnél lévő P_0 és a hajszálérrendszerénél lévő P_{cap} nyomások különbségének) a függvényében! 1.3pt

A.2 Számítsd ki numerikusan a 0. szinten lévő kis ütőér Q_0 térfogatáramerősségét, ha ennek sugara 6.0×10^{-5} m és hossza 2.0×10^{-3} m. Vedd úgy, hogy a kis ütőérhálózat beömlőnyílásánál 55 mmHg a nyomás, a hálózatnak $N = 6$ szintje van, és a kapillárisrendszer nyomása 30 mmHg. A vér viszkozitása $\eta = 3.5 \times 10^{-3}$ kg m⁻¹ s⁻¹. Az eredményedet ml/h (ml/óra) egységekben fejezd ki! 0.5pt

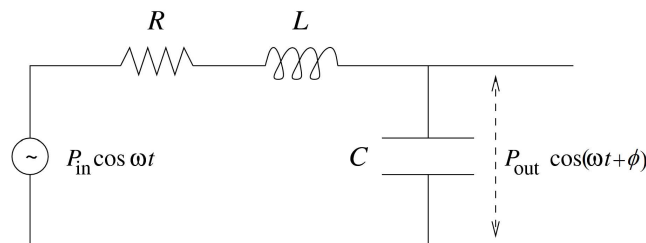
Az erek, mint egy LCR áramkör

A merevfalú hengeres ér közelítés sok okból elégtelennek bizonyul. Különösen fontos figyelembe venni az áramlás időbeli változását és az erek átmérőjének változását, amit a vér változó nyomása okoz a szív által végzett pumpálás egy-egy periódusa alatt. Ezen kívül megfigyelték, hogy a nagy erekben a vér nyomása jelentősen változik egy ciklus során, míg a kisebb erekben a nyomásingadozás amplitúdója sokkal kisebb és az áramlás közel időfüggetlen.

Ha a nyomás megnő egy rugalmas érben, akkor megnő az átmérője, ami miatt több folyadékot tárolhat, majd továbbíthat, amikor a nyomás csökken. Így az ér rugalmas viselkedése úgy vehető figyelembe, hogy egy kondenzátort is hozzáadunk az eredeti leíráshoz. Ezen kívül, amikor az áramlás időfüggő, a folyadék $\rho = 1.05 \times 10^3$ kg m⁻³ sűrűségével arányos lendületét is figyelembe kell venni. Ez a lendület egy induktív ellenállással vehető figyelembe a modellben. A 2. ábra mutatja egyetlen ér helyettesítő (ekvivalens) áramkörét. Az ekvivalens kapacitás és induktivitás:

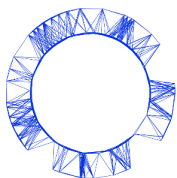
$$C = \frac{3\ell\pi r^3}{2Eh} \quad \text{és} \quad L = \frac{9\ell\rho}{4\pi r^2}, \quad (2)$$

ahol h az ér falának vastagsága, és E az ütőér Young-modulusa (amely meghatározza az ér méretváltozását egy erő hatására). A Young modulus nyomás mértékegységű, nagysága pedig $E = 0.06$ MPa a kis ütőerek esetében.



2. ábra Egyetlen ér helyettesítő áramköre

Theory



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q3-3

HungaryHUN (Hungary)

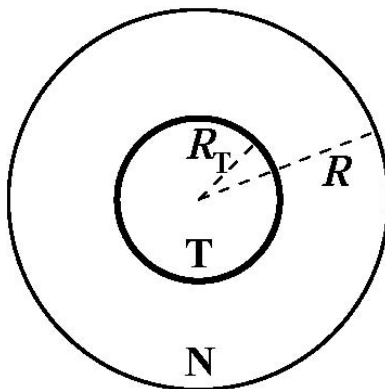
A.3 Határozd meg stacionárius esetben a P_{out} nyomásamplitúdót az ér kiömlőnyílásánál a beömlőnyílásnál lévő P_{in} nyomásamplitúdó, az R ekvivalens ellenállás, az L ekvivalens induktivitás és a C ekvivalens kapacitás függvényében egy ω körfrekvenciájú áramlásnál. Írjál fel η , ρ , E , h , r és ℓ között egy olyan feltételt, amely biztosítja, hogy kis frekvencián a kiömlőnyílásnál lévő nyomásamplitúdó kisebb mint P_{in} . 2.0pt

A.4 Az **A.2** feladatban szereplő érhálózatra határozd meg az ütőerek h falvastagának maximális olyan értékét, hogy az **A.3** feladatban szereplő feltétel teljesüljön. (Tedd fel, hogy h szintfüggetlen.) 0.7pt

Part B. Daganatnövekedés (5,5 pont)

A daganat (tumor) növekedése nagyon összetett folyamat, amelyben a biológiai folyamatok, mint a sejtosztódás és a természetes szelekció, összefonódnak a fizikával. Ebben a feladatban a daganatnövekedés egy egyszerűsített modelljét vizsgáljuk, amelyben a szilárd daganatokban tapasztalható nyomásnövekedéssel foglalkozunk.

Tekintsük normál sejtek egy csoportját, melyek egy nyújthatatlan hárttyával körbevett szövetet alkotnak. A hárttya a szövetet mindig állandó, R sugarú gömb formában tartja (3. ábra).



3. ábra: Egyszerűsített daganat

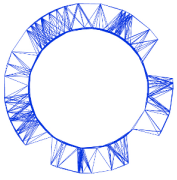
Kezdetben a szövetben nincsen maradékfeszültség, azaz a nyomás minden pontban megegyezik a külső légnyomással.

A $t = 0$ pillanatban a daganat (tumor) elkezd nőni ennek a gömbnek a középpontjában, és ahogy növekszik, a szövet belsejében megnő a nyomás. Tegyük fel, hogy mindkét szövet (normál, N, és tumor, T) összenyomható, és ρ_N illetve ρ_T sűrűségeik lineárisan nőnek a nyomással:

$$\rho_N = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_N}\right), \quad \rho_T = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K_T}\right), \quad (3)$$

ahol ρ_0 a szövet nyugalmi sűrűsége, p a nyomáskülönbség a légköri nyomáshoz képest, és K_N , K_T a normál szövet, illetve a tumorszövet kompressziómodulusa. Általában a daganatok merevebbek, és így nagyobb a kompressziómodulusuk.

Theory



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q3-4

HungaryHUN (Hungary)

- B.1** A normál sejtek tömege nem változik miközben a daganat nő. Határozd meg a daganat térfogatának és a teljes szövet térfogatának $v = V_T/V$ hányadosát $\mu = M_T/M_N$ [a daganat tömegének (M_T) és a normál szövet tömegének (M_N) hányadosa] és $\kappa = K_N/K_T$ [a kompressziómodulusok hányadosa] függvényében! 1.0pt

A hyperthermiát néha együtt használják a kemoterápiával és radioterápiával a rákgyógyításban. A hyperthermiában a ráksejteket szelektíven felmelegítik a 37 °C-os normál testhőmérsékletről 43 °C fölé, amivel elpusztítják őket. Kutatók jelenleg olyan szén nanocsövecskéket fejlesztenek ki, melyeket az őket bevonó speciális fehérje a tumorsejtekhez képes kapcsolni. Ha a szövetet közeli infravörös sugárzással besugározzák, akkor a nanocsövek sokkal nagyobb mértékben abszorbeálják a sugárzást, mint a környező szövet és így szelektíven felmelegíthetők - velük együtt pedig a daganatsejtek is, amelyekhez kapcsolódnak.

Tegyük fel, hogy a daganat, a normál sejtek és a környező szövet egyforma, k hővezetési tényezővel rendelkezik, azaz ennek a feladatnak a geometriája szerint az az energia, amely időegységenként és felületegységenként áthalad egy r sugarú gömbfelületen egyenlő a hőmérséklet r szerinti deriváltjának k -szorosával. A nanocsövecskék egyenletesen vannak elosztva a daganat térfogatában és térfogategységenként \mathcal{P} teljesítménnyel képesek hőt felszabadítani. Tegyük fel, hogy a tumortól nagyon távol a hőmérséklet megegyezik a normál emberi testhőmérséklettel

- B.2** Határozd meg állandósult állapotban a hőmérsékletet a daganat középpontjában \mathcal{P} , k , az emberi testhőmérséklet és a daganat R_T sugarának függvényében! 1.7pt

- B.3** Határozd meg a \mathcal{P}_{\min} minimális térfogategységre eső teljesítményt, amely ahhoz kell, hogy egy 5.0 cm sugarú daganat minden sejtjét 43.0 °C-nál magasabb hőmérsékletre melegítse. A szövet hővezetési tényezője $k = 0.60 \text{ W K}^{-1}\text{m}^{-1}$. 0.5pt

Tegyük fel, hogy egy daganatot egy az **A.1** feladatban szereplő, elágazó szerkezetű érhálózat lát el vérrel. A növekedő daganatban, amikor a p nyomás nagyobbá válik a legvékonyabb erekben lévő P_{cap} nyomásnál, az ér sugara egy kicsiny δr értékkel lecsökken. Ha ez a nyomás eléri egy kritikus p_c értéket (amelyhez δr_c sugárcsökkenés tartozik), a legvékonyabb erek összeomlanak, ami komolyan veszélyezteti a daganat vérellátását. A nyomás- és sugárváltozás kapcsolatát a következő fenomenológikus összefüggés adja meg:

$$\frac{p}{P_{\text{cap}}} - 1 = \left(\frac{p_c}{P_{\text{cap}}} - 1 \right) \left(2 - \frac{\delta r}{\delta r_c} \right) \frac{\delta r}{\delta r_c}. \quad (4)$$

Tegyük fel, hogy csak a legvékonyabb erek ($N-1$. szint) sugara változik meg, amikor a daganat megnöveli a nyomását.

- B.4** Fejezd ki a lineáris tartományban (azaz amikor $p - P_{\text{cap}}$ nagyon kicsi) a térfogatáramerősség $\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}}$ relatív csökkenését ezekben az erekben, a daganatot jellemző $v = V_T/V$ térfogathányados, valamint K_N , N , p_c , δr_c , r_{N-1} , P_{cap} függvényében. 2.3pt