

Termoakusztikus gép

A termoakusztikus gép egy olyan eszköz, amely hőenergiát alakít át akusztikus energiává, azaz hanghullámokká - tehát egy fajta mechanikai munkává. Mint sok más hőerőgép, ezt is lehet ellentétes irányban, hűtőgépként használni, amikor a hang segítségével pumpálunk hőt a hidegebb hőtartályból a melegebb hőtartályba. A nagy működési frekvencia lecsökkenti a hővezetést és szükségtelenné teszi egy zárt munkahenger használatát. Más hőerőgépektől eltérően a termoakusztikus gépben nincsenek mozgó alkatrészek a munkvégző közeg kivételével.

A termoakusztikus gépek hatásfoka általában alacsonyabb, mint más gépeké, viszont az előállítási és üzemeltetési költségei alacsonyabbak. Ez lehetőséget ad megújuló energetikai alkalmazásokhoz, mint például Nap-hőerőművek vagy hulladékhő felhasználás. A vizsgálatunk az akusztikus energia előállítására fog fókuszálni az eszközön belül, figyelmen kívül hagyva a külső energia kinyerő vagy átalakító eszközöket.

A rész: Hanghullámok egy zárt csőben (3.7 pt)

Tekintsünk egy hőszigetelő, L hosszúságú és S keresztmetszetű csövet, amelynek a tengelye az x irányban fekszik. A cső két vége az $x = 0$ és $x = L$ helyen van. A cső egy ideális gázzal van feltöltve, és mindkét vége le van zárva. Egyensúlyban a gáz hőmérséklete T_0 , nyomása p_0 és sűrűsége ρ_0 . Tegyük fel, hogy a viszkozitás elhanyagolható, és a gáz csak az x irányban mozog. A gáz tulajdonságai a merőleges y és z irányokban nem változnak.



1. ábra

- A.1** Ha egy állóhullám alakul ki, a gáz elemei az x irányban ω körfrekvenciájú rezgést végeznek. A rezgés amplitúdója függ az egyes elemek x egyensúlyi helyzetétől a csőben. A gáz egyes elemeinek hosszirányú elmozdulását az x egyensúlyi helyzettől a következő összefüggés adja meg: 0.3pt

$$u(x, t) = a \sin(kx) \cos(\omega t) = u_1(x) \cos(\omega t) \quad (1)$$

(vedd észre, hogy itt u a gáz egy elemének elmozdulását írja le)

ahol $a \ll L$ egy pozitív állandó, $k = 2\pi/\lambda$ a hullámszám és λ a hullámhossz. Mekkora a λ_{\max} lehetséges maximális hullámhossz ebben a rendszerben?

A feladat során végig feltételezzük a $\lambda = \lambda_{\max}$ módust.

Most vegyünk egy vékony gáztérfogatot (egy gázréteget), amely nyugalomban x és $x + \Delta x$ ($\Delta x \ll L$) között helyezkedik el. Az A.1 feladatban leírtak szerint ez a réteg oszcillál az x tengely mentén, és a térfogata és más termodinamikai paraméterei is változnak.

A következőkben mindenhol feltételezzük, hogy a termodinamikai mennyiségek megváltozása sokkal kisebb, mint az egyes mennyiségek egyensúlyi értéke.

- A.2** A réteg $V(x, t)$ térfogata a $V_0 = S\Delta x$ egyensúlyi érték körül oszcillál, amit ez a kifejezés ír le: 0.5pt

$$V(x, t) = V_0 + V_1(x) \cos(\omega t). \quad (2)$$

Keress egy kifejezést $V_1(x)$ értékére V_0 , a , k és x függvényében!

- A.3** Tegyük fel, hogy a gáz nyomása a hanghullám hatására közelítőleg a következő formában írható fel: 0.7pt

$$p(x, t) = p_0 - p_1(x) \cos(\omega t). \quad (3)$$

A gágrétegre ható erők figyelembevételével számítsd ki elsőrendben a nyomásozcilláció $p_1(x)$ amplitúdóját az x helyzet, a ρ_0 egyensúlyi sűrűség, az elmozdulás a amplitúdója, valamint a hullám k és ω paramétereinek függvényében!

Hangfrekvenciáknál a gáz hővezetése elhanyagolható, így a gáz kitágulását és összenyomódását tisztán adiabatikusnak tekinthetjük, amely kielégíti a $pV^\gamma = \text{const}$ egyenletet, ahol γ az adiabatikus kitevő.

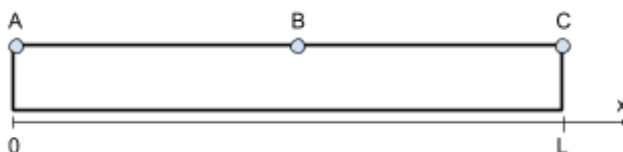
- A.4** A fenti összefüggést és az eddigi feladatok eredményét felhasználva határozd meg elsőrendben a hanghullámok $c = \omega/k$ sebességét a csőben! A választ p_0 , ρ_0 és a γ adiabatikus konstans függvényében add meg. 0.3pt

- A.5** A gáz hőmérsékletének változása az adiabatikus kitágulás és összenyomás hatására, a hanghullám következtében, a következő összefüggéssel adható meg: 0.7pt

$$T(x, t) = T_0 - T_1(x) \cos(\omega t). \quad (4)$$

Számítsd ki a hőmérséklet-oszcilláció $T_1(x)$ amplitúdóját T_0 , γ , a , k és x függvényében!

- A.6** Ebben az egy feladatban tegyük fel, hogy a cső és a gáz között egy gyenge termikus kölcsönhatás van. Ennek hatására a hang állóhullám lényegében változatlan marad, de a gáz egy kevés hőt cserélhet a csővel. A viszkozitás által okozott melegedés elhanyagolható. A 2. ábra mindegyik pontjánál (A, C a cső végeinél, B a közepén) add meg, hogy a cső hőmérséklete az egyes pontoknál hosszú idő alatt nő, csökken, vagy változatlan marad! 1.2pt

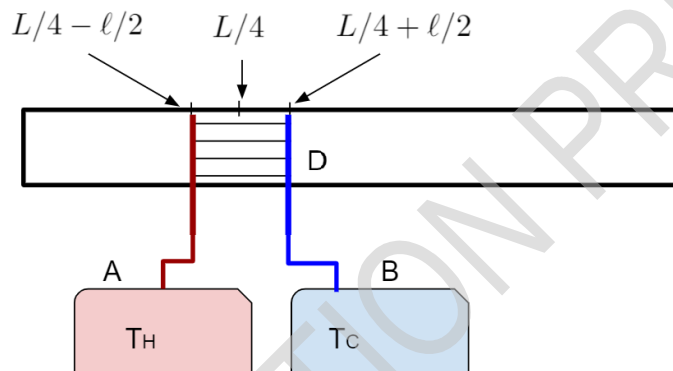


2. ábra

B rész: Hanghullám erősítés külső hőkontaktussal (6.3 pt)

Egy köteg vékony, jól elrendezett merev lemezt helyezünk a csőbe. A köteg lemezei párhuzamosak a cső tengelyével, és így nem akadályozzák a gáz mozgását a csőben. A lemezköteg középpontja az $x_0 = L/4$ helyen van, a köteg tengellyel párhuzamos hossza $\ell \ll L$, és a köteg kitölti a cső teljes keresztmetszetét. A lemezköteg jobb és bal vége között állandó τ hőmérsékletkülönbség van. A lemezköteg bal széle az $x_H = x_0 - \ell/2$ helyen egy külső hőtartály segítségével $T_H = T_0 + \tau/2$ hőmérsékleten, a jobb széle az $x_C = x_0 + \ell/2$ helyen pedig $T_C = T_0 - \tau/2$ hőmérsékleten van tartva.

A lemezekben van egy csekély hosszirányú hővezetés, amely a lemezköteg két vége között állandó hőmérsékletgradienst hoz létre, így $T_{\text{plate}}(x) = T_0 - \frac{x-x_0}{\ell}\tau$.



3. ábra: A rendszer vázlata. (A) és (B) a forró illetve a hideg hőtartályt jelöli. (D) jelöli a lemezköteget.

Ahhoz, hogy megvizsgáld a lemezköteg és a csőben lévő állóhullámú gáz közötti hőkapcsolatot, vedd figyelembe a következő feltevéseket:

- Ahogy az előző részben is, a termodinamikai mennyiségek megváltozása most is sokkal kisebb, mint az egyes mennyiségek egyensúlyi értéke.
- A rendszer az alap állóhullám módusban működik a lehető legnagyobb hullámhosszal. A lemezköteg ezt csak egész kicsit módosítja
- A lemezköteg sokkal kisebb, mint a hullámhossz: $\ell \ll \lambda_{\text{max}}$, és elég messze lehet helyezni a kitérés és a nyomás csomópontjaitól is, és így az $u(x, t) \approx u(x_0, t)$ kitérés és a $p(x, t) \approx p(x_0, t)$ nyomás állandónak tekinthető a lemezköteg teljes hosszában.
- Elhanyagolhatunk minden széleffektust, ami a gáz lemezek végénél való ki- és belépésből származik.
- A hőmérsékletkülönbség a lemezköteg két vége között, azaz a forró és hideg hőtartály között, kicsi az abszolút hőmérséklethez viszonyítva: $\tau \ll T_0$.
- A hővezetés a lemezkötegen át, a gázon át és a csőben egyaránt elhanyagolható. Az egyetlen jelentős hőtranszfert a gáz mozgásából származó hőáramlás, valamint a gáz és a lemezköteg közti hővezetés okozza.

- B.1** Tekintsünk azt a gázréteget a lemezköteg tartományában, amely eredetileg az $x_0 = L/4$ helyen van. Ahogy ez a réteg mozog a lemezkötegben, a lemezköteg hozzá közeli részének a lokális hőmérséklete így változik:

$$T_{\text{env}}(t) = T_0 - T_{\text{st}} \cos(\omega t). \quad (5)$$

Fejzd ki T_{st} -t a , τ és ℓ függvényében!

- B.2** Mekkora kritikus τ_{cr} hőmérséklet-különbség felett fog a gáz hőt szállítani a forró hőtartályból a hidegbe? Fejzd ki τ_{cr} -t T_0 , γ , k és ℓ függvényében. 1.0pt

- B.3** Vezess le egy általános közelítő kifejezést egy kis gázrétegbe belépő $\frac{dQ}{dt}$ hőáramra a térfogat és nyomás változási sebességének lineáris függvényeként! Válaszodat a $\frac{dV}{dt}$ térfogat változási sebességgel, a $\frac{dp}{dt}$ nyomás változási sebességgel, a gázréteg p_0 , V_0 egyensúlyi nyomásával és térfogatával, valamint a γ adiabatikus kitevővel fejzd ki. (Használhatod az állandó térfogaton mért molhő $c_v = \frac{R}{\gamma-1}$ kifejezését is, ahol R a gázállandó.) 0.8pt

A lemezköteg és a gázréteg közötti korlátozott hőáram miatt fáziskülönbség alakul ki a gázrétegben a nyomás- és térfogat-oscilláció között. Azt fogjuk megnézni, hogy lesz ebből munkavégzés.

Legyen a hőáram a lemezkötegből a gázrétegbe arányos a gázréteg és a lemezköteg vele szomszédos része közötti hőmérsékletkülönbséggel, amit közelítőleg így írhatunk le: $\frac{dQ}{dt} = -\beta V_0 (T_{\text{st}} - T_1) \cos(\omega t)$. Itt T_1 és T_{st} a gázréteg és a vele szomszédos lemezköteg hőmérséklet-oscillációjának amplitúdója az A.5 és B.1 feladatokból, és $\beta > 0$ egy állandó. Tegyük fel, hogy a gép működési frekvenciáján a gáz hőmérséklet-változása ennek a hőáramnak a következtében jelentéktelen T_1 -hez és T_{st} -hez viszonyítva.

- B.4** Annak érdekében, hogy kiszámítsuk a munkát, figyelembe vesszük a mozgó gázréteg térfogatváltozását a lemezköteggel való termikus kapcsolat következtében. Írjuk fel a gázréteg nyomását és térfogatát a lemezköteg hatása alatt így: 1.9pt

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_a \sin(\omega t) - p_b \cos(\omega t), \\ V &= V_0 + V_a \sin(\omega t) + V_b \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (6)$$

Adott p_a és p_b esetében fejzd ki a V_a és V_b együtthatókat p_a , p_b , p_0 , V_0 , γ , τ , τ_{cr} , β , ω , a és ℓ függvényében!

- B.5** Vezess le egy közelítő kifejezést az egységnyi térfogatra jutó w akusztikus munkára, amit a gázréteg végez egy ciklus alatt! Integráld ezt a lemezköteg teljes térfogatára, hogy megkapjad a gáz által egy ciklus alatt végzett teljes W_{tot} munkát! Fejzd ki W_{tot} -ot γ , τ , τ_{cr} , β , ω , a , k és S függvényében. 0.8pt



B.6 Vezess le egy közelítő kifejezést arra a Q_{tot} hőre, ami az $x = x_0$ sík bal oldaláról jobbra szállítódik egy ciklus alatt! Válaszodat $\tau, \tau_{\text{cr}}, \beta, \omega, a, S, \ell$ függvényében add meg.
(Útmutatás: használhatod a $j = Q \frac{du}{dt}$ kifejezést a hővezetés által létrehozott hőáramra.) 0.8pt

B.7 Fejezd ki a termoakusztikus gép η hatásfokát! A hatásfok definíció szerint a generált akusztikus munka és a forró hőtartályból felvett hő hányadosa. Eredményedet fejezd ki a forró és hideg hőtartály közötti τ hőmérsékletkülönbség, a τ_{cr} kritikus hőmérsékletkülönbség és a $\eta_c = 1 - T_C/T_H$ Carnot-hatásfok függvényében. 0.6pt

DELEGATION PRINT