

James Webb Space Telescope (12 points)

This is a question on the physics of the James Webb Space Telescope. Light from a star strikes the primary mirror, with an area of $A_{\text{mirror}} = 25 \text{ m}^2$, and reflects off of a secondary mirror. The focal length of the system is $f = 130 \text{ m}$. The light is focused into the ISIM (Integrated Science Instrument Module), which contains the CCD (charged-coupled device) cameras.

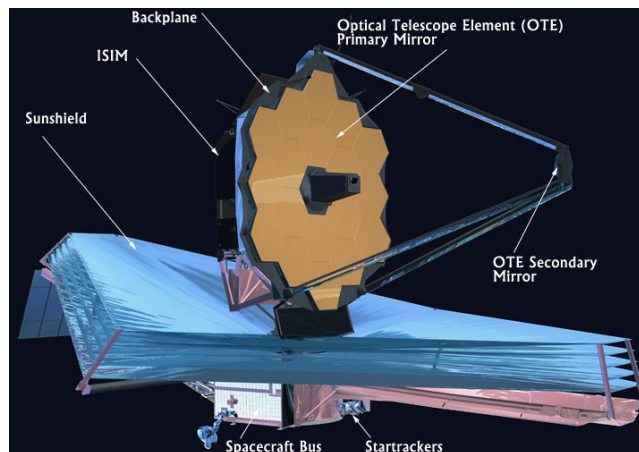


Image Credit: NASA

Part A. Imaging a Star (1.8 points)

The nearest Red Giant is 89 light-years distant, has a temperature of $T_{\text{star}} = 3600 \text{ K}$, and a diameter of $d_o = 1.7 \times 10^{11} \text{ m}$.

A.1 Calculate the diameter of a focused image of the star on the CCD camera imaging surface. 0.4pt

A.2 Estimate the diameter of a diffraction central maximum on the CCD camera imaging surface. Assume a wavelength of $\lambda = 800 \text{ nm}$, which is the strongest intensity wavelength from the red giant star. 0.4pt

A.3 If the CCD is not cooled and can lose heat only by radiating from the top of the imaging surface, what would be the equilibrium temperature of the CCD at the location of the image of the red giant star? Assume the CCD surface is a blackbody. Provide a formula and a numerical estimate. 1.0pt

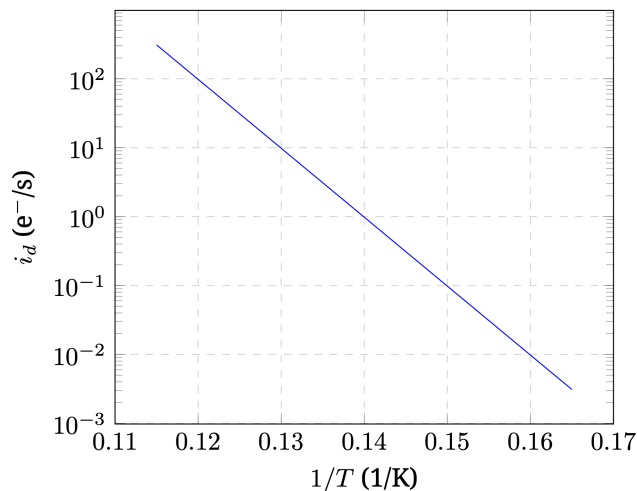
Part B. Counting Photons (1.8 points)

The absorption of a photon by the CCD camera leads to the emission of an electron within the apparatus. This occurs only if the photon has sufficient energy to excite an electron across an energy gap ΔE_g . Assume that every photon with sufficient energy succeeds. There is also leakage of electrons across the gap caused by the temperature of the CCD camera; this is the dark current i_d and is measured in the

number of electrons per second. It is a function of temperature according to

$$i_d = i_0 e^{-|\Delta E_g|/6k_B T}. \quad (1)$$

where i_0 is a constant.



The graph shows how dark current varies with temperature. The units for dark current, e⁻/s should be thought of as counting a number of electrons per second.

- B.1** From the dark current graph, provide an order of magnitude estimate for the temperature of a distant source of thermal photons that would just be capable of exciting an electron on the pixel. 0.4pt

The electrons are collected in a capacitor, and after an exposure time τ , the electrons are counted. There are three main sources of uncertainty in the process: a fixed uncertainty in the counting process called read out noise; a Poisson distribution error associated with the dark current, and a Poisson distribution error associated with the detected incoming photons. Poisson distribution errors are equal to the square root of the number of counts associated with a process. The measured photon count is equal to the number of electrons in the capacitor, minus the number of electrons associated with the dark current.

- B.2** Write an expression for the total count uncertainty σ_i , if there is a readout noise σ_r , a dark current i_d , an incoming photon rate p , and an exposure time τ . 0.4pt

For remaining questions in this part assume the exposure time is $\tau = 10^4$ s and the read out noise is a fixed $\sigma_r = 14$.

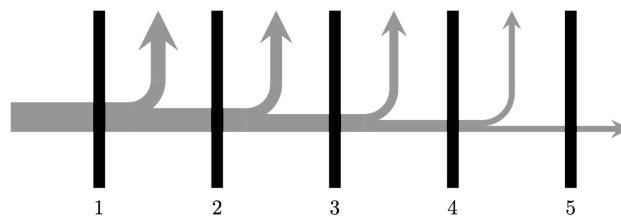
- B.3** Assume an operating temperature of $T_p = 7.5$ K. Calculate the minimum photon rate p so that the photon count is ten times the count uncertainty. 0.5pt

- B.4** Assuming all photons are just capable of exciting an electron across the band gap 0.5pt
 gap, what is the intensity of the source of photons found in B.3 on the primary mirror? Express your answer in W/m^2

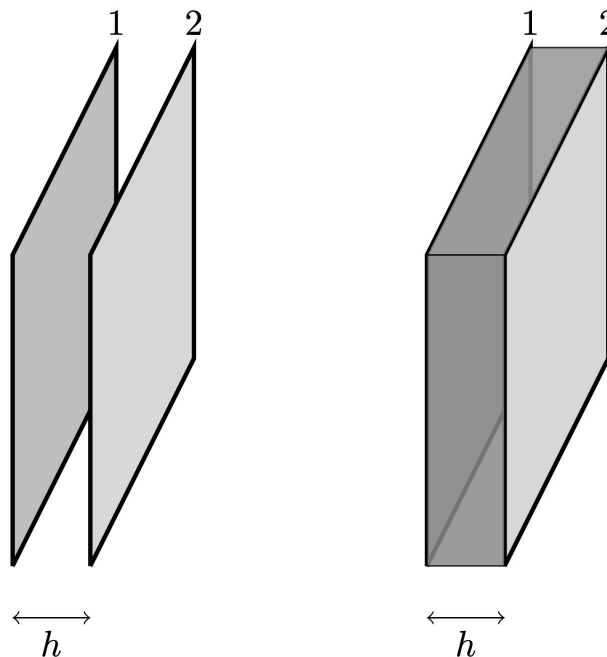
Part C. Passive Cooling (4.4 points)

An infrared CCD camera must be kept at a low temperature. The first tool is a shield to protect from the sun's radiation.

The sun-shield consists of five separated reflective layers in thin sheets (black); radiant energy (gray) from the sun is incident on the first sheet on left, and some energy escapes between every pair of sheets.



Schematic of energy flow: the vertical lines (black) are the sheets, the flow of energy (gray) is from the left to the right, however, between sheets, some energy flows up and out into space.



On the left is a simple model of two adjacent sheets 1 and 2 separated by a distance h . The sheets are not connected, and the perimeter is open to space. Assume the sheets are parallel. Thermal radiation can be exchanged between the sheets, and thermal radiation can escape through the perimeter gap. On the right, the perimeter gap has been shaded to help visualize.

Assume the following simplifications:

- Sheets are square, each with area $A_{\text{sheet}} = 200 \text{ m}^2$.
- Sheets are parallel and separated by $h = 25 \text{ cm}$ along the perimeter.
- Sheets have constant emissivity $\epsilon \ll 1$. Assume that all reflections off of sheet surfaces are diffuse.
- Sheets are thin with temperature on the front and back surfaces equal and uniform.
- The fraction of radiant flux emitted by a sheet that is absorbed by the adjacent sheet is $\alpha \leq 1$. This means that if sheet 1 in the figure above emits an amount of heat Q_1 toward sheet 2 then sheet 2 will absorb an amount αQ_1 from sheet 1.
- The amount of radiant flux ejected out of the perimeter gap between two sheets is approximated as βQ_{12} where αQ_{12} is the net flux between the two sheets. The fraction $\beta < 1$. This is equivalent to saying that the heat loss to space between two sheets is proportional to the net heat exchange between the sheets. This is a rough approximation for this problem.
- Background temperature of space is negligible.

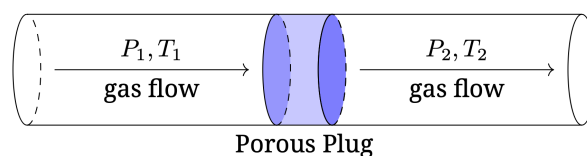
C.1 Derive expressions for the equilibrium temperatures of the first sheet and fifth sheet in terms of the incident solar radiation intensity I_0 , the constants α and β , and any necessary physical constants. To simplify your expression, you may define additional constants in terms of α and β , etc. 2.4pt

C.2 Derive numerical estimates for α and β from the information about the sheet geometry assuming an emissivity $\epsilon = 0.05$. You are encouraged to consider the rectangular box model of the sheets above, where the perimeter area effectively acts as a perfect absorber of radiant energy. 1.6pt

C.3 Numerically determine the temperatures of sheet 1 and sheet 5. The solar intensity is $I_0 = 1360 \text{ W/m}^2$. 0.4pt

Part D. Cryo-cooler (4 points)

The last stage of the cooling system directly cools the CCD camera. A closed cycle refrigeration system has a supply pipe line feeding helium gas at constant pressure P_1 moving through a sponge like porous plug into a pipe with constant pressure P_2 . The pipe carries the gas to cool the CCD. The helium gas then passes through a pump before returning to the supply line.



Helium gas supplied on the left at well defined pressure P_1 and temperature T_1 is forced through the plug to well defined pressure P_2 and temperature T_2 , where it is carried away on the right.

As the gas moves through the porous plug, viscous friction with the narrow walls of the channels in the sponge becomes an important effect; however, no heat is transferred to or from the gas during the

process. The bulk speed of the gas in region 2 is only marginally greater than the bulk speed in region 1.

Helium is not an ideal gas, but does remain in a gaseous state throughout this process.

D.1 Consider a mole of gas that passes from left to right through the plug. 1.0pt
Complete the table in your answer sheet by writing '>' or '<' to identify the quantity that must be greater, '=' to identify quantities that must be equal, or '?' if it is not possible to know which is greater or equal without more information.

D.2 Identify a conserved quantity constructed from U (internal energy), P (pressure), and V (volume) as a mole of gas moves through the plug; show work on how you derived this conserved quantity. 0.6pt

Your answer sheets have graphs of internal energy per mass against volume per mass for helium with isotherms and lines of constant entropy.

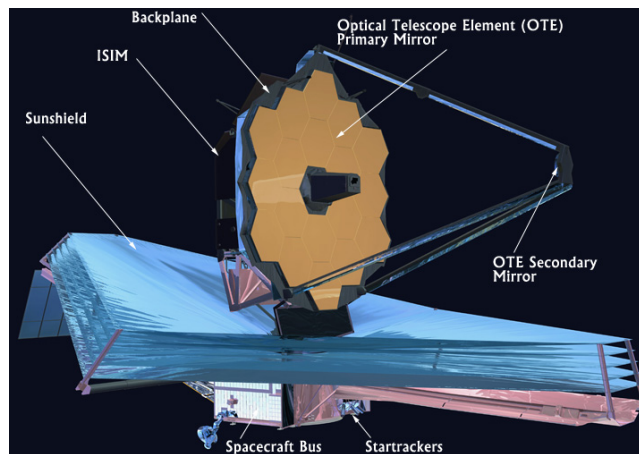
D.3 Assuming that $V_2 = 0.100 \text{ m}^3/\text{kg}$ and $T_2 = 7.5 \text{ K}$, use the graph to find a numerical value for the conserved quantity that you found in Part D.2. Show the construction on the graph! 1.4pt

D.4 Find the maximum possible temperature for T_1 . Show the construction on the graph! 0.8pt

D.5 Assuming your value for the maximum T_1 found in D.4, find a numerical value for P_1 . 0.2pt

James Webb űrteleszkóp (12 pont)

Ez a feladat a James Webb űrteleszkóp fizikájáról szól. A csillagokból érkező fény eléri a főtükört, melynek területe $A_{\text{mirror}} = 25 \text{ m}^2$. A fény a második tükör felé verődik vissza. Az optikai rendszer fókusz távolsága $f = 130 \text{ m}$. A fény az ISIM nevű integrált mérőrendszerre (Integrated Science Instrument Module) vetül, mely CCD (charge-coupled device) kamerákat tartalmaz.



A kép forrása: NASA

A rész: Egy csillag leképezése (1.8 pont)

A legközelebbi vörös óriás 89 fényévre van, hőmérséklete $T_{\text{star}} = 3600 \text{ K}$, átmérője $d_o = 1.7 \times 10^{11} \text{ m}$.

A.1 Számítsd ki a vörös óriásnak a CCD kamera képalkotó felületén képződő éles képek átmérőjét! 0.4pt

A.2 Becsüld meg a CCD kamera képalkotó felületén kialakuló diffrakciós folt átmérőjét! Feltételezd, hogy a hullámhossz $\lambda = 800 \text{ nm}$, ezen a hullámhosszon sugároz a vörös óriás csillag a legintenzívebben. 0.4pt

A.3 Ha a CCD detektor nincs hűtve, akkor a képalkotó felület csak hősugárzás útján képes hőt leadni. Határozd meg a CCD felületének egyensúlyi hőmérsékletét a vörös óriás csillag által megvilágított területen! Tekintsük fekete testnek a CCD felületét! Vezess le formulát, és adj számszerű becslést is a hőmérsékletre! 1.0pt

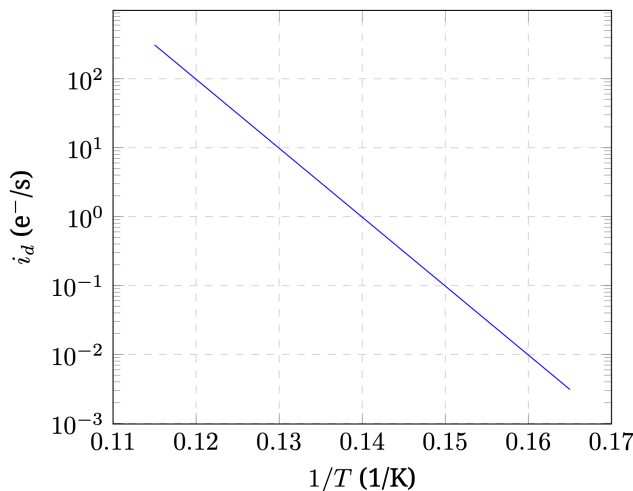
B rész: Foton számlálás (1.8 pont)

Ha a CCD kamera elnyel egy beérkező fotont, a készülékben egy elektron szabadul fel. Ez csak akkor válik meg, ha a beérkező fotonnak elég energiája van ahhoz, hogy elektront hozzon gerjesztett állapotba a ΔE_g szélességű tiltott sávon keresztül. Feltételezzük, hogy minden foton, mely elegendő energiával rendelkezik, gerjeszt egy elektront. Vannak továbbá a hőmozgásból fakadó termikus gerjesztődések is, melyek nem fotonok hatására keletkeznek. Ezt hívjuk az i_d sötétáramnak, amit elektronszám per másod-

percben mérünk. A sötétáram az alábbi módon a detektor hőmérsékletétől függ:

$$i_d = i_0 e^{-|\Delta E_g|/6k_B T}. \quad (1)$$

ahol i_0 egy konstans.



A diagram a sötétáram hőmérsékletfüggését mutatja be. A sötétáramot e^-/s egységben mérjük, vagyis elektronszám per másodperc egységben.

- B.1** A sötétáram-diagram alapján adj nagyságrendi becslést arra, hogy mekkora hőmérsékletűnek kell lennie a távoli fényforrásnak, hogy annak fotonjai éppen képesek legyenek gerjeszteni a detektor elektronjait. 0.4pt

Az elektronok egy kondenzátorban gyűlnek össze, és τ expozíciós idő után az összegyűlt elektronokat megszámlálják. A folyamatnak három fő hibaforrása van. Adott mértékű bizonytalanság származik a kiolvasás hibájából. Poisson-eloszlású zajt okoz a sötétáram, és szintén Poisson-eloszlású zaj származik a bejövő fotonok számának statisztikai ingadozásából. A Poisson-eloszlású hiba nagysága mindig egyenlő az adott folyamatból származó elektronszám várható értékének négyzetgyökével.

A detektált fotonok száma a kondenzátorban lévő elektronok számának, valamint a sötétáramból származó elektronok számának különbségeként áll elő.

- B.2** Írj fel egy összefüggést a teljes elektronszám σ_t bizonytalanságára, ha a kiolvasás hibája σ_r , a sötétáram értéke i_d , az időegység alatt beérkező fotonok száma, vagyis a fotonfluxus p , és az expozíciós idő τ . 0.4pt

A B rész további feladataiban feltételezzük, hogy az expozíciós idő $\tau = 10^4$ s, és a kiolvasási hiba rögzített értéke: $\sigma_r = 14$.

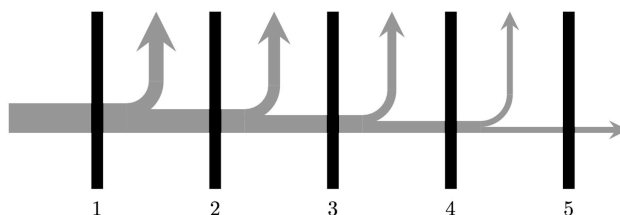
- B.3** Feltételezzük, hogy a működési hőmérséklet $T_p = 7.5$ K. Számítsd ki, mekkora az a minimális p fotonfluxus, amely mellett a detektált fotonok száma tízszer nagyobb, mint a számlálás bizonytalansága! 0.5pt

- B.4** Feltételezzük, hogy minden foton képes elektront gerjeszteni a tiltott sávon keresztül. Határozd meg, mekkora fényintenzitásnak kell beérkeznie az első tükrösre, ha azt szeretnénk, hogy a B.3 részben meghatározott fotonfluxus érje a detektort! Fejezd ki a választ W/m^2 egységben. 0.5pt

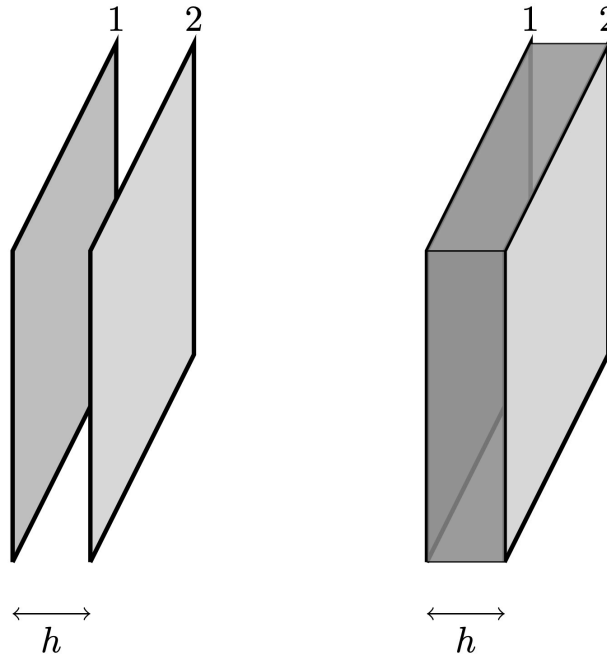
C rész: Passzív hűtés (4.4 pont)

Egy infravörös CCD kamerát alacsony hőmérsékleten kell tartani. Először is árnyékolni kell az eszközt, hogy megvédjük a nap sugárzásától.

Az árnyékoló öt darab független fényvisszaverő réteget tartalmaz, melyeket az ábrán sötét vonalakkal tüntettünk fel. Az energia (világossal jelölve) sugárzás útján éri el az első réteget. Az egyes rétegek között az energia egy része elhagyja a rendszert.



Az energiaáramlás sematikus képe: a függőleges sötét vonalak jelölik a lemezeket, az energiaáramlás irányát pedig a világos nyilak jelölik. Az energia balról jobbra áramlik, ám az energia egy része felfelé távozik a rendszerből.



Jobb oldalon látható két szomszédos lemez egyszerű modellje. Az 1. és a 2. lemez h távolságra helyezkedik el egymástól, feltételezzük, hogy a lemezek párhuzamosak. A felületek nem érintkeznek. Az első felület a világűr felé néz. A lemezek csak hőszugárzás útján lépnek egymással kölcsönhatásba. A sugárzás képes kilépni a lemezek pereménél található résen. A jobb oldali képen a lemezek pereménél található rés felülete van sötétszürke színnel feltüntetve.

Éljünk a következő egyszerűsítésekkel:

- A lemezek négyzet alakúak, a területe mindegyiknek egyaránt 200 m^2 .
- A lemezek párhuzamosak, a lemezek egymástól mért távolsága $h = 25 \text{ cm}$.
- A lemezek emisszióképessége $\epsilon \ll 1$. Feltételezzük, hogy a lemezek a sugárzást diffúz módon tükrözik.
- A lemezek vékonyak, így a hőmérséklet a lemez egyik és másik oldalán ugyanakkora, a hőmérséklet-eloszlás a lemez felületén homogén.
- Az egyik lemez által kisugárzott, és a szomszéd lemez által elnyelt energiák hányadosa $\alpha \leq 1$. Ez azt jelenti, hogyha az 1. lemez kibocsájt Q_1 mennyiségű hőt a 2. lemez felé, a 2. lemez αQ_1 mennyiségű hőt nyel el.
- A két lemez pereme által határolt résen eltávozó energia megközelítőleg βQ_{12} ahol αQ_{12} a két lemez közt megvalósuló eredő hőcsere. $\beta < 1$. Ez azt jelenti, hogy a hővesztesség arányos a két lemez közti eredő hőáram. Ez jelentősen leegyszerűsíti a probléma kezelését.
- Az űr háttérhőmérséklete elhanyagolható.

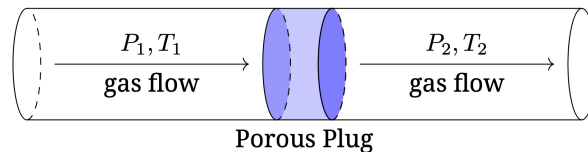
C.1 Vezess le összefüggést az első és az ötödik lemez egyensúlyi hőmérsékletére abban az esetben, ha a beérkező napsugárzás intenzitása I_0 , az α és a β konstans adott, valamint a szükséges fizikai állandók is adottak. Hogy egyszerűsítsd a kifejezést, definiálhatsz további konstansokat α -val és β -val kifejezve . 2.4pt

C.2 Adj numerikus becslést α és β értékére a geometria ismeretében, továbbá az emissziós képesség ismeretében $\epsilon = 0.05$. Javasoljuk, hogy a lemezek közti teret szögletes dobozként modellezd, a lemezek széleinél található rést tekintsd olyan felületnek, mely a sugárzást tökéletesen elnyeli. 1.6pt

C.3 Határozd meg az 1. és az 5. lemez hőmérsékletét numerikusan! A napsugárzás intenzitása $I_0 = 1360 \text{ W/m}^2$. 0.4pt

D rész: Cryo-hűtő (4 pont)

A hűtőrendszer utolsó eleme közvetlenül hűti a CCD kamerát. Egy zárt rendszerű hűtőrendszer héliumot pumpál egy csőbe, ahol állandó P_1 nyomást tart fent. A gáz átáramlik egy szivacsos szerkezetű dugón, melynek túloldalán állandó P_2 nyomás mérhető. A cső továbbítja a gázt, amely hűti CCD detektort. Onnan a gáz visszajut a pumpába, mely újra a hűtőrendszer bemenetére vezeti a gázt.



A rendszerbe héliumgáz érkezik a bal oldalon jól meghatározott P_1 nyomással és T_1 hőmérséklettel. A gázt átáramoltatjuk a porózus dugón. A túloldalán a nyomás P_2 , a hőmérséklet T_2 . A gáz a jobb oldali irányban távozik.

Ahogy a gáz átáramlik a porózus dugón, a viszkózus súrlódás fontos szerepet játszik, annak ellenére, hogy a folyamat során nem történik hőcsere. A gázáramlás sebessége a 2. térrészben alig nagyobb, mint az 1. térrészben. A hélium nem ideális gáz, de mindvégig gáz állapotban marad a folyamat során.

D.1 Tekintsünk fel egy mólt gázt, amely balról jobbra áthalad a dugón. Egészítsd ki a táblázatot a válaszlapon '>' vagy '<' jelekkel, aszerint, hogy melyik mennyiség nagyobb, vagy tegyél '=' jelet, ha a két mennyiség egyenlő. Ha a két mennyiség közti reláció nem eldönthető, írd '?' jelet! 1.0pt

D.2 Konstruálj egy megmaradó mennyiséget az U (belső energia), P (nyomás), és a V (térfogat) mennyiségek felhasználásával, amely állandó marad, midőn a gáz átáramlik a dugón. Mutasd be a levezetést, amely alapján belátható, hogy a konstruált mennyiség megmarad! 0.6pt

A válaszlapon találhatóak grafikonok, melyek az egységnyi tömegre jutó belső energiát ábrázolják az egységnyi tömegre eső térfogat függvényében izoterm, valamint konstans entrópiájú vonalak mentén.

D.3 Feltételezzük, hogy $V_2 = 0.100 \text{ m}^3/\text{kg}$ és $T_2 = 7.5 \text{ K}$. A diagram alapján találd meg a D.2 részben konstruált megmaradó mennyiség numerikus értékét! Módszeredet mutasd be a grafikonon! 1.4pt

D.4 Határozd meg a T_1 hőmérséklet maximális lehetséges értékét! Módszeredet mutasd be a grafikonon! 0.8pt

D.5 Vegyük a D.4 részben meghatározott maximális T_1 hőmérsékletet! Határozd meg az ehhez tartozó P_1 nyomást! 0.2pt