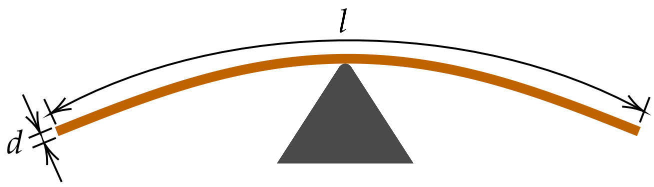
Scaling laws (8 points)

Scaling laws describe the functional relationship between two physical quantities that scale with each other over a significant interval. This functional relationship can be a power law, but there are other possibilities, too. Oftentimes, exact expressions are beyond reach, but scaling laws can still be derived.

Part A. Spaghetto (2.0 points)

A.1 A spaghetto straw of diameter d is being balanced horizontally from its middle. If $d = 1$ mm, the straw breaks under its own weight once its length reaches $l = 50$ cm. What is the maximum length l' of the straw of diameter $d' = 1$ cm before it breaks under its own weight? 2.0pt



Part B. Sand castle (2.0 points)

B.1 The average grain volume of coarse-grained sand is 10 times as large as that of fine-grained sand. Wet fine-grained sand and wet coarse-grained sand have both optimal water content (i.e. assuming the maximal strength of the constructions from it) and are used to build two cylinders of exactly the same shape and size. The strength of each cylinder is tested by pressing it between two parallel plates. The cylinder made of coarse-grained sand gets destroyed once the force applied to press the plates reaches $F_c = 10$ N. How large is the force F_f needed to destroy the cylinder made of fine-grained sand? You may ignore the effects of gravity. 2.0pt

Part C. Interstellar travel (2.0 points)

C.1	The spaceship of an interstellar expedition travels at a constant magnitude of the proper acceleration $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$, i.e., this is the acceleration of the spaceship in the inertial frame of reference where it is instantaneously at rest. The passengers must be able to return to Earth within their remaining expected lifetime of 50 years. The maximum distance from Earth reached by the spaceship is d. If the acceleration is increased to $g' = 15\,\mathrm{m/s^2}$, the spaceship can reach a farther distance d'. What is the ratio d'/d? *Hint 1.* You may wish to use the relativistic velocity addition formula, however, there are also other approaches. *Hint 2.* You may need to deal with hyperbolic functions defined as follows: $\cosh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$, $\sinh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$, $\tanh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$. *Hint 3.* Depending on your approach, you may need one or more of these integrals: $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \operatorname{atanh} x + C$, $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{asinh} x + C$, $\int \sinh x \mathrm{d}x = \cosh x + C$, where $\operatorname{asinh} x$ and $\operatorname{atanh} x$ are the inverse functions of the respective hyperbolic functions.	2.0pt

Part D. That sinking feeling (2.0 points)

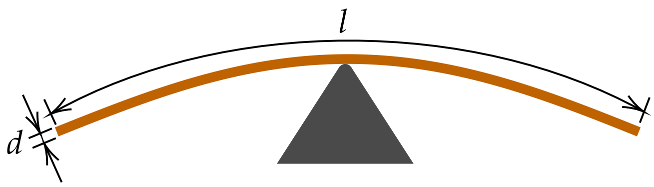
D.1	A solid wooden ball of radius r_0 is floating in the water. Ignoring frictional effects, the frequency of small oscillations would be ω_0, but because of viscous friction, after being displaced vertically, the frequency of decaying oscillations is actually $0.99\,\omega_0$. What is the minimum radius r_{min} of a wooden ball floating in water that undergos small oscillations when displaced? *Hint: t*he viscous drag force acting on a given body is proportional to its speed relative to the bulk of the fluid, and to the viscosity η of the fluid it is moving in. The unit of the viscosity is $\mathrm{kg/(m \cdot s)}$.	2.0pt

Skálatörvények (8 pont)

A skálatörvény olyan matematikai összefüggés két fizikai mennyiség között, amely több nagyságrenden keresztül fennáll. Ez a matematikai összefüggés lehet hatványfüggvény, de lehet más kapcsolat is. Sokszor egy jelenség leírására nem ismert pontos törvény, csak skálatörvény.

A rész: Spagetti (2.0 pont)

A.1 Egy d átmérőjű spagettiszálat a közepénél alátámasztva kiegyensúlyozunk. Ha $d = 1\,\mathrm{mm}$, a spagettiszál a saját súlya alatt kettétörik, ha a szál hossza eléri az $l = 50\,\mathrm{cm}$ értéket. Mekkora a $d' = 1\,\mathrm{cm}$ átmérőjű spagettiszál esetén az l' maximális hossz, ami mellett a szál nem törik el saját súlya alatt? 2.0pt



B rész: Homokvár (2.0 pont)

B.1 A durvaszemcsés homok átlagos szemcsemérete 10-szerese a finomszemcsés homok szemcseméretének. Durva- és finomszemcsés, ideális nedvességtartalmú (azaz legnagyobb szilárdságú építmények készítéséhez alkalmas) homokból egy-egy azonos méretű és alakú hengert készítünk. A hengerek szilárdságát úgy mérjük, hogy két párhuzamos sík között összenyomjuk őket. A durvaszemcsés homokból készült henger $F_\mathrm{c} = 10\,\mathrm{N}$ nyomóerőnél roppan össze. Mekkora F_f nyomóerő szükséges a finomszemcsés homokból készült henger összeroppantásához? A gravitációs hatásokat hanyagold el! 2.0pt

C rész: Csillagközi utazás (2.0 pont)

C.1 Egy csillagközi expedíció űrhajója $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ nagyságú sajátgyorsulással mozog, ami azt jelenti, hogy az űrhajó ekkora gyorsulással mozog az űrhajóval az adott pillanatban együtt mozgó inerciális vonatkoztatási rendszerben. Az űrutasoknak vissza kell tudni érniük a Földre a még hátralevő 50 éves várható élettartamukon belül. Így az űrhajó maximálisan d távolságra tudja elhagyni a Földet. Ha a gyorsulást $g' = 15\,\mathrm{m/s^2}$-re emelnénk, akkor az űrhajó d' távolságra jutna el a Földtől. Mekkora a d'/d arány? — 2.0pt

1. segítség: Lehet, hogy használni szeretnéd a relativisztikus sebesség összeadás formuláját, azonban vannak más utak is.

2. segítség: Lehet, hogy szükséged lesz a hiperbolikus függvényekre. Ezek definíciója a következő: $\cosh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$, $\sinh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$, $\tanh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

3. segítség: A megoldási módszeredtől függően szükséged lehet a következő integrálok közül egyre vagy többre: $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \operatorname{atanh} x + C$, $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{asinh} x + C$, $\int \sinh x \mathrm{d}x = \cosh x + C$, ahol $\operatorname{asinh} x$ illetve $\operatorname{atanh} x$ a megfelelő hiperbolikus függvény inverze.

D rész: Úszó fagolyó (2.0 pont)

D.1 Egy r_0 sugarú tömör fagolyó úszik a vízen. Ha nem lenne súrlódás, a kis rezgések frekvenciája ω_0 lenne, de a viszkózus súrlódás miatt a kis függőleges irányú kitérítés után létrejövő rezgés valódi frekvenciája csak $0.99\,\omega_0$. — 2.0pt

Mekkora az a minimális r_{min} sugár, amely mellett a vízen úszó fagolyó kis kitérítés után még oszcillációkat végez?

Segítség: Egy testre ható viszkózus fékezőerő arányos a testnek az őt körülvevő közeghez viszonyított relatív sebességével, valamint ennek a közegnek az η viszkozitásával. A viszkozitás mértékegysége $\mathrm{kg/(m \cdot s)}$.