A talajkolloidok jellemzése (10 pont)

A kolloidtudomány felhasználható a talajrészecskék vizsgálatára, mert a talajszemcsék jó része a kolloidokra jellemző mikrométeres mérettartományba esik. Például a Brown-mozgás (a kolloid részecskék véletlenszerű mozgása) felhasználható a részecskék méretének meghatározására.

Part A.: Kolloid részecskék mozgása (1,6 pont)

Egy M tömegű kolloid részecske egydimenziós Brown-mozgását elemezzük. A részecske $v(t)$ sebességére felírt mozgásegyenlet a következő:

$$M\dot{v} = -\gamma v(t) + F(t) + F_{\text{ext}}(t), \tag{1}$$

ahol γ a súrlódási együttható, $F(t)$ a vízmolekulák véletlenszerű ütközéséből eredő erő, és $F_{\text{ext}}(t)$ egy külső erő. Az A. részben feltételezzük, hogy $F_{\text{ext}}(t) = 0$.

A.1	Tételezzük fel, hogy egy vízmolekula ütközik a részecskével a $t = t_0$ időpontban, miközben I_0 impulzust ad át neki, de az ütközést követően $F(t) = 0$. Ha az ütközés előtt $v(t) = 0$, az ütközés után $v(t) = v_0 e^{-(t-t_0)/\tau}$ alakú $t > t_0$ esetén. Határozd meg a v_0 és a τ értékét, felhasználva I_0-t és az (1) egyenletben szereplő szükséges mennyiségeket!	0.8pt

A következőkben a τ -t használd a válaszaidban.

A.2	Valójában a vízmolekulák egymás után ütköznek a részecskékkel. Tegyük fel, hogy az i-edik ütközés I_i impulzust ad át a részecskéknek a t_i időpontban. Feltételezzük, hogy a $t > 0$ időpillanatokban a részecske sebessége $v(t)$ függvénnyel írható le, továbbá feltételezzük, hogy v(0)=0. Határozd meg a $v(t)$-t! Írj fel egy egyenlőtlenséget is, amely kijelöli, hogy adott t esetén milyen tartományba eső t_i-ket kell figyelembe venni.	0.8pt

Part B.: Az effektív mozgásegyenlet (1,8 pont)

Az eddigi eredmények azt mutatják, hogy egy részecske $v(t)$ és $v(t')$ sebességei tekinthetők korrelálatlannak és véletlen értékűnek, ha $|t-t'| \gg \tau$. Ezek alapján bevezetünk egy elméleti modellt, mely közelítőleg leírja az egydimenziós Brown-mozgást. A modell szerint a sebesség véletlenszerűen változik minden δ $(\gg \tau)$ időintervallumban.

$$v(t) = v_n \quad (t_{n-1} < t \le t_n), \tag{2}$$

ahol $t_n = n\delta$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ és v_n egy véletlen sebességérték. Ezek kielégítik az alábbiakat:

$$\langle v_n \rangle = 0, \quad \langle v_n v_m \rangle = \begin{cases} C & (n = m), \\ 0 & (n \ne m), \end{cases} \tag{3}$$

ahol a C paraméter függ a δ megválasztásától. Itt $\langle X \rangle$ jelöli az X várható értékét. Ezen azt értjük, hogy ha végtelen sokszor sorsolunk egy X véletlen számot, akkor annak átlaga $\langle X \rangle$ lesz.

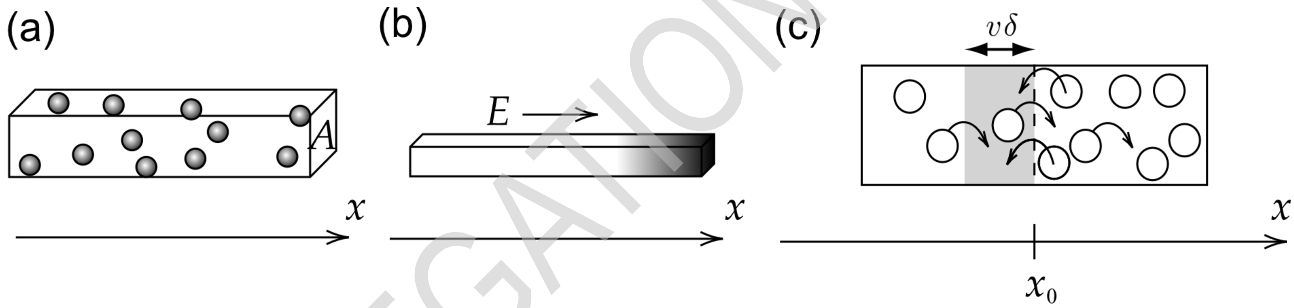
Most a részecske $\Delta x(t) = x(t) - x(0)$ elmozdulását vizsgáljuk a $t = N\delta$ időpillanatban, ahol N egész szám.

B.1	Határozd meg a $\langle\Delta x(t)\rangle$ és a $\langle\Delta x(t)^2\rangle$ várható értékeket a C, a δ és a t paraméterek függvényében!	1.0pt

B.2	A $\langle\Delta x(t)^2\rangle$ mennyiséget átlagos négyzetes elmozdulásnak (MSD) nevezik. Ez egy jellegzetes, megfigyelhető paramétere a Brown-mozgásnak, amely a $\delta \to 0$ határesetnek felel meg. Ez alapján beláthatók az alábbi arányosságok: $C \propto \delta^{\alpha}$ és $\langle\Delta x(t)^2\rangle \propto t^{\beta}$. Határozd meg az α és a β kitevőket!	0.8pt

Part C.: Elektroforézis (2.7 pont)

Az alábbiakban az elektroforézist, azaz a töltött részecskék elektromos térrel történő áramoltatását tárgyaljuk. A kolloid részecskék tömege M és töltésük $Q\ (>0)$. A kolloid részecskék oldata egy keskeny, A keresztmetszetű csőben helyezkedik el (1. (a) ábra). A részecskék közötti kölcsönhatást, a cső falának hatását, a folyadék és a benne lévő ionok hatását, valamint a gravitációt hagyjuk figyelmen kívül.



1. ábra: A part C. során használt összeállítás.

Ha a közegben homogén E elektromos mezőt kapcsolunk be x-irányban, a részecskék mozogni kezdenek, és $n(x)$ koncentrációjuk (részecskeszám térfogategységenként) nem lesz egyenletes (1. (b) ábra). Az E elektromos tér kikapcsolásakor ez az egyenetlenség fokozatosan megszűnik a részecskék Brown-mozgásának köszönhetően. Ha az $n(x)$ nem egyenletes, a jobbra és balra mozgó részecskék száma eltérhet (1.(c) ábra). Ez részecskeáramot generál az x tengely mentén. A $J_D(x)$ részecskeáram-sűrűség megadja, hogy egységnyi idő alatt mennyi részecske halad át az x koordinátájú helyen felvett, x-tengelyre merőleges sík egységnyi felületelemén. A részecskeáram-sűrűség kielégíti az alábbi egyenletet:

$$J_D(x) = -D\frac{dn}{dx}(x), \tag{4}$$

Ahol D -t a diffúziós együtthatónak nevezzük.

Most az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a részecskék felének $+v$ a másik felének $-v$ sebessége van. Legyen $N_+(x_0)$ azon részecskék száma, amelyek olyan sebességgel rendelkeznek, hogy képesek áthaladni balról jobbra az x_0 koordinátájú sík egységnyi felületén egységnyi idő alatt.

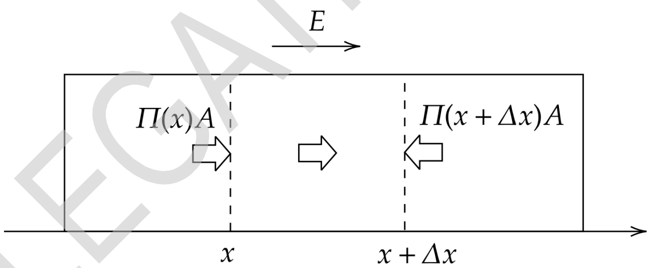
Ahhoz, hogy a $+v$ sebességű részecskék egy δ időintervallumon belül áthaladjanak a x_0 síkon, az 1.(c) ábra sötétített tartományában kell lenniük. Mivel δ kicsi, részecskesűrűség közelíthető a $n(x) \simeq n(x_0) + (x-x_0)\frac{dn}{dx}(x_0)$ formában x_0 kicsiny környezetében.

C.1	Fejezd ki $N_+(x_0)$ -t a $v,\ \delta,\ n(x_0)$, és $\frac{dn}{dx}(x_0)$ mennyiségek közül szükségesek felhasználásával.	0.5pt

Definiáljuk $-v$ sebességgel rendelkező részecskékre a $N_-(x_0)$ - t az $N_+(x_0)$ definíciójával analóg módon. Ennek segítségével megkaphatjuk részecskeáram-sűrűséget a$J_D(x_0) = \langle N_+(x_0) - N_-(x_0)\rangle$ összefüggés segítségével. A (3) egyenlet szerint a sebességnégyzet várható értéke $\langle v^2\rangle = C$.

C.2	Határozd meg a $J_D(x_0)$ áramsűrűséget a $C,\ \delta,\ n(x_0)$ és a $\frac{dn}{dx}(x_0)$ mennyiségek közül szükségesek segítségével! Ennek és a (4) egyenletnek a felhasználásával fejezd ki a D diffúziós állandót a C és a δ segítségével, és fejezd ki a $\langle \Delta x(t)^2\rangle$ -et a D és a t paraméterek felhasználásával.	0.7pt

A következőkben a Π ozmózis nyomás hatását tárgyaljuk. Az ozmózis nyomást a $\Pi = \frac{n}{N_A}RT = nkT$ összefüggés adja meg, ahol N_A az Avogadro-állandó, R a gázállandó, T a hőmérséklet és $k = \frac{R}{N_A}$ a Boltzmann-állandó. Tekintsük az E elektromos tér hatására kialakuló inhomogén koncentrációt (1.(b) ábra). Mivel az $n(x)$ koncentráció függ az x-től, így a $\Pi(x)$ ozmózis nyomás is helyfüggő. Ekkor a $\Pi(x)$és a $\Pi(x+\Delta x)$ okozta erők eredőjét kiegyenlíti a részecskékre ható E mezőből származó összes erő (2. ábra). Mivel Δx igen kicsi, így az $n(x)$ ebben a tartományban állandónak tekinthető, míg a koncentráció megváltozása az alábbi módon fejezhető ki: $n(x+\Delta x) - n(x) \simeq \Delta x \frac{dn}{dx}(x)$



2. ábra: Erőegyensúly.

C.3	Fejezd ki a koncentráció $\frac{dn}{dx}(x)$ deriváltját az $n(x)$, T, Q, E és k paraméterek segítségével.	0.5pt

Vizsgáljuk most az áramsűrűség egyensúlyát. A Brown-mozgásból eredő $J_D(x)$ áramsűrűségen kívül létezik egy elektromos mezőből eredő áramsűrűség is, melyre $J_Q(x)$formában hivatkozunk. Ezen áramsűrűséget a következőképp számíthatjuk ki:

$$J_Q(x) = n(x)u, \tag{5}$$

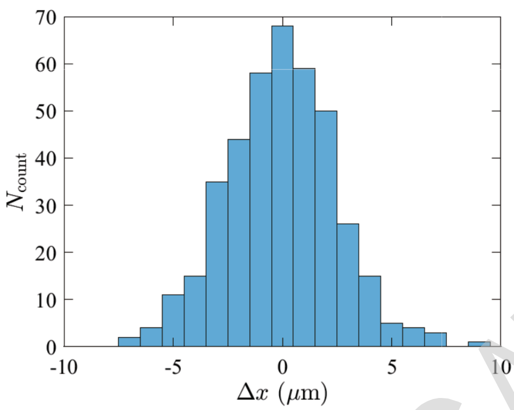
ahol u a mező által mozgatott részecskék végsebessége.

C.4	Az u meghatározásához az (1) egyenletet használjuk, feltételezve, hogy a részecskékre az elektromos tér $F_{\text{ext}}(t) = QE$ erővel hat. Mivel $v(t)$ fluktuál, ezért feltételezzük, hogy $\langle v(0)\rangle = 0$. Tudjuk továbbá, hogy$\langle F(t)\rangle = 0$. Határozzuk meg a részecskék végsebességét az alábbi határérték számítással $u = \lim_{t\to\infty}\langle v(t)\rangle$.	0.5pt

C.5	A részecskeáram-sűrűségek egyensúlya a következőképp írható fel: $J_D(x) + J_Q(x) = 0$ Fejezzük ki a D diffúziós együtthatót a k, γ, és T mennyiségekkel!	0.5pt

Part D.: rész: Közepes négyzetes elmozdulás (2,4 pont)

Tegyük fel, hogy egy magányos, gömb alakú, $a = 5.0\ \mu$m sugarú kolloid részecske Brown-mozgását figyeljük meg vízben. A 3. ábra a Δx elmozdulások hisztogramját mutatja. Az elmozdulásokat x-irányban mértük $\Delta t = 60$ s időintervallumok alatt. A súrlódási együtthatót a $\gamma = 6\pi a\eta$ összefüggés adja, ahol a víz viszkozitása $\eta = 8.9 \times 10^{-4}$ Pa $\cdot$ s, a hőmérséklet pedig $T = 25\ ^\circ$C volt.



Δx (μm)	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4
N_{count}	0	0	0	2	4	11	15
Δx (μm)	-3	-2	-1	0	1	2	3
N_{count}	35	44	58	68	59	50	26
Δx (μm)	4	5	6	7	8	9	10
N_{count}	15	5	4	3	0	1	0

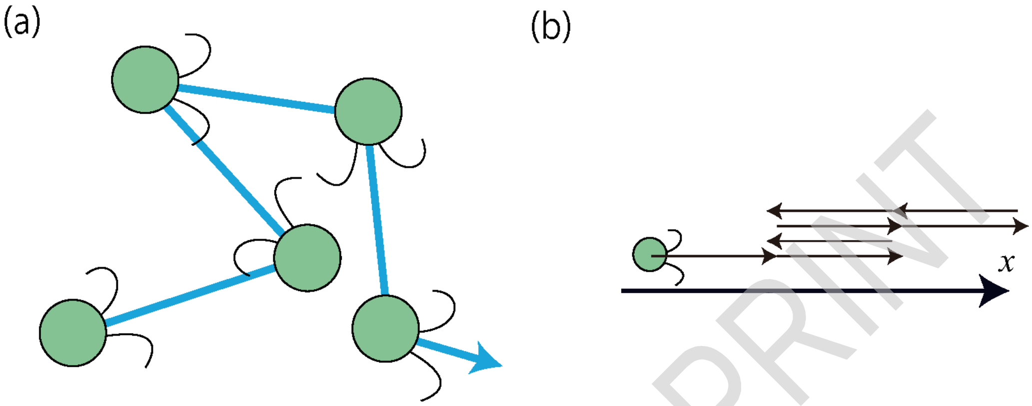
3. ábra: Az elmozdulások hisztogramja

D.1	Becsüld meg az N_A értékét anélkül, hogy tudomásul vennénk, hogy ez az Avogadro-állandó. A becslést két értékes számjegyig végezd a 3. ábra adataiból. A gázállandó $R = 8.31$ J/K $\cdot$ mol . Ne használd a Boltzmann állandó Általános Instrukciókban leírt értékét! Előfordulhat, hogy a Boltzmann állandó irodalmi értékétől eltérő eredményt kapsz.	1.0pt

Most kiterjesztjük a B részben szereplő modellt annak érdekében, hogy leírjuk egy Q töltéssel rendelkező részecske mozgását az E elektromos térben. A (2) egyenletben definiált $v(t)$ részecske sebességet $v(t) = u + v_n$ $(t_{n-1} < t \leq t_n)$-vel kell helyettesíteni, a (3) egyenletnek megfelelő v_n-el. Az u pedig az (5) egyenletben szereplő végsebesség.

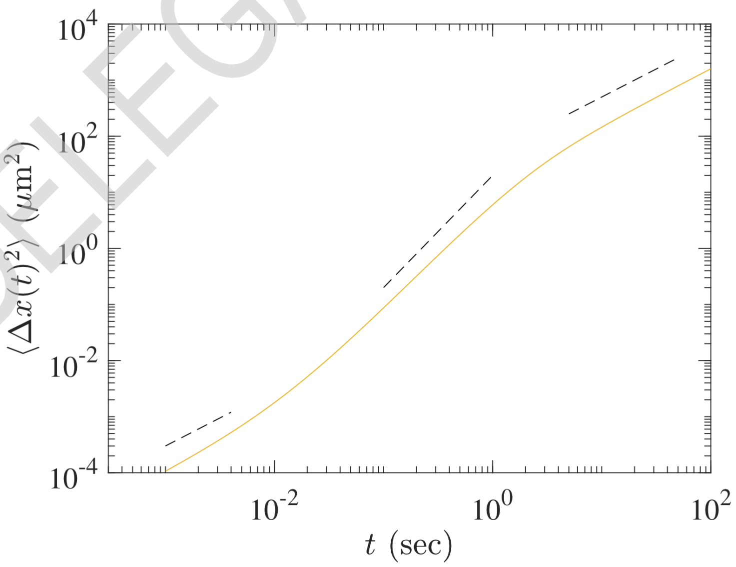
D.2	Fejezd ki az $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ átlagos négyzetes elmozdulást az u, D és a t kifejezésekkel! Állapíts meg, hogy közelítőleg az idő hányadik hatványával arányos az átlagos négyzetes elmozdulás kis t és nagy t, értékek mellett, valamint állapítsd meg azt a t_* jellemző időt, amikor a hatványfüggvény jellege megváltozik. Vázold az átlagos négyzetes elmozdulás grafikonját log-log diagramban, feltüntetve a t_* hozzávetőleges helyét.	0.8pt

A következőkben vízben úszó mikrobák mozgását fogjuk vizsgálni, az egyszerűség kedvéért egydimenzióban (4.(b) ábra). Tekintsük őket gömb alakú részecskéknek, amelyek sugara a. Vagy $+u_0$ vagy $-u_0$ sebességgel úsznak, az előjelet minden δ_0 időintervallumban véletlenszerűen választják meg, korreláció nélkül. A megfigyelt mozgás az úszásból eredő elmozdulások és a gömb alakú részecske Brownmozgásából eredő elmozdulások eredője.



4. ábra: a) A mikrobák mozgása. (b) A mozgás egydimenziós modellje.

D.3 Az 5. ábrán láthatjuk a mikrobák $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ átlagos négyzetes elmozdulását az idő függvényében. A függvény az eltérő időintervallumokban eltérő hatványfüggvény szerint változik. A kis t értékek, a közepes, valamint a nagy t értékek tartományát egy-egy szaggatott vonal jelöli. Állapítsd meg az idő hatványkitevőjét az egyes tartományokon, és fejezd ki az időfüggést a D, u_0, δ_0, és t paraméterek közül szükségesek segítségével! 0.6pt



5. ábra: A mikrobák átlagos négyzetes elmozdulása.

Part E.: Víztisztítás (1,5 pont)

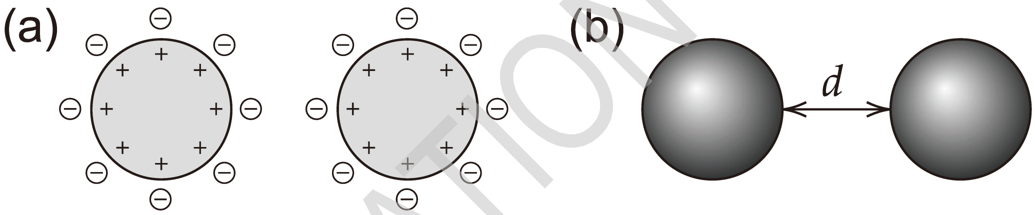
Az alábbiakban kolloid jellegű talajrészecskéket is tartalmazó víz tisztítását tárgyaljuk, a talajrészecskék koagulációját elősegítő elektrolitok hozzáadásával. A részecskék a Van der Waals-erő és az elektrosztatikus erő révén lépnek kölcsönhatásba egymással. Ez utóbbi magában foglalja mind a felületi töltések, mind a az ellentétesen töltött ionok hatását. (A részecskét körülvevő, ellentétes töltésű ionréteget antiion-kettősrétegnek hívjuk. 6.(a) ábra) Ennek eredményeképpen a részecskék d távolságára a következő kölcsönhatási potenciál (6. ábra (b)) adódik:

$$U(d) = -\frac{A}{d} + \frac{B\epsilon(kT)^2}{q^2}e^{-d/\lambda}, \tag{6}$$

ahol A és B és pozitív konstansok, ϵ a víz dielektromos állandója, és λ a kettősréteg vastagsága. Feltételezve, hogy az ionok töltése $\pm q$, az alábbiakat kapjuk:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\epsilon kT}{2N_A q^2 c}}, \tag{7}$$

ahol c az ion moláris koncentrációja.



6. ábra: a) Kolloid részecskék és az antiionok felületi töltései. (b) A d távolság meghatározása.

E.1	Ha nátrium-kloridot (NaCl) adunk a szuszpenzióhoz, az a kolloid részecskék koagulációját eredményezi. Határozd meg a koagulációhoz szükséges legkisebb c NaCl-koncentrációt! Elég, ha két részecskét vizsgálunk csupán, és eltekintünk a hőmozgástól, azaz $F(t) = 0$ az (1.) egyenletben. Feltételezzük továbbá, hogy az adott potenciálból származó erőhöz tartozó végsebességet a részecske azonnal eléri.	1.5pt