Neutroncsillagok (10 pont)

Ebben a feladatban a nagy atommagok stabilitását tárgyaljuk, valamint elméleti és kísérleti úton megbecsüljük a neutroncsillagok tömegét.

Part A. Az atommagok tömege és stabilitása (2,5 pont)

A Z számú protonból és N számú neutronból álló atommag $m(Z,N)c^2$ nyugalmi energiája a $B(Z,N)$ kötési energiával kisebb a protonok és neutronok – a továbbiakban nukleonok – nyugalmi energiáinak összegénél (c a vákuumbeli fénysebesség). A kisebb korrekciókat figyelmen kívül hagyva az a_V paraméterű térfogati tagból, az a_S paraméterű felületi tagból, az a_C paraméterű Coulomb-energiatagból és az a_{sym} paraméterű szimmetrikus energiatagból álló kötési energiát a következőképpen közelíthetjük:

$$m(Z,N)c^2 = Am_Nc^2 - B(Z,N), \qquad B(Z,N) = a_VA - a_SA^{2/3} - a_C\frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}}\frac{(N-Z)^2}{A}, \tag{1}$$

ahol $A = Z + N$ a tömegszám, és m_N a nukleonok tömege. A számítás során az $a_V \approx 15.8\ \text{MeV}$, $a_S \approx 17.8\ \text{MeV}$, $a_C \approx 0.711\ \text{MeV}$ és $a_{\text{sym}} \approx 23.7\ \text{MeV}$ (MeV = 10^6 elektronvolt) értékeket használjuk.

A.1 A $Z = N$ feltétel mellett határozzuk meg azt az A értéket, amivel az egy nukleonra jutó B/A kötési energia maximális! 0.9pt

A.2 Rögzített A mellett a legstabilabb atommag Z^* atomszámát a $B(Z, A-Z)$ maximalizálásával tudjuk meghatározni. Számítsd ki Z^*-ot az (1) egyenlet segítségével $A = 197$ esetén! 0.9pt

A.3 Egy nagy A tömegszámú atommag hasadással könnyebb atommagokra bomlik a teljes nyugalmi energia minimalizálásának érdekében. Az egyszerűség kedvéért tekintsük a (Z,N) atommag két, azonos magra történő bomlásának többféle módja közül azt, amelyik akkor következik be, ha a következő energiareláció érvényesül: 0.7pt

$$m(Z,N)c^2 > 2m(Z/2, N/2)c^2.$$

Ha ezt az összefüggést a

$$Z^2/A > C_{\text{fission}}\frac{a_S}{a_C},$$

alakban írjuk fel, határozd meg C_{fission} értéket két értékes jegy pontossággal!

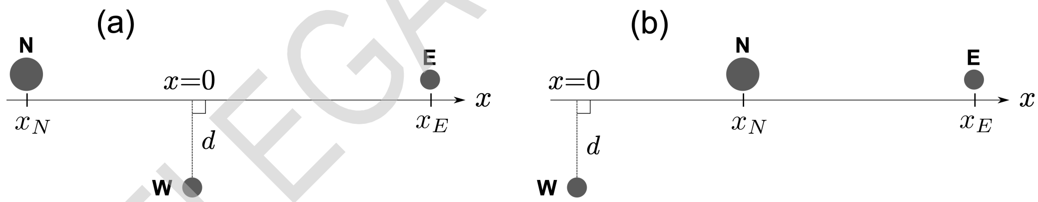
Part B. A neutroncsillag mint óriási atommag (1,5 pont)

Nagy tömegszámú, nehéz atommagok esetében, ha a tömegszámuk egy bizonyos A_c küszöbértéknél nagyobbak ($A > A_c$), akkor ezek az atommagok stabilak maradnak a maghasadással szemben a gravitációnak köszönhető, megfelelően nagy kötési energiájuk miatt.

B.1	Tegyük fel, hogy az $N = A$ és a $Z = 0$ eset kellően nagy A esetén megvalósul, és az (1) egyenlet továbbra is érvényes a gravitációs kötési energia hozzáadásával. A gravitáció okozta kötési energia $$B_{\text{grav}} = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R},$$ ahol $M = m_N A$ az atommag tömege és $R = R_0 A^{1/3}$ az atommag sugara; $R_0 \simeq 1.1 \times 10^{-15}$ m $= 1.1$ fm. Határozd meg a $B_{\text{grav}} = a_{\text{grav}} A^{5/3}$ kifejezésben lévő a_{grav} értékét MeV egységben egy értékes jegy pontosan! Ezután a felületi tagot figyelmen kívül hagyva becsüld meg az A_c értékét egy értékes jegy pontosan! A számítás során az $m_N c^2 \simeq 939$ MeV és a $G = \hbar c / M_P^2$ helyett az $M_P c^2 \simeq 1.22 \times 10^{22}$ MeV és a $\hbar c \simeq 197$ MeV $\cdot$ fm értékeket használd.	1.5pt

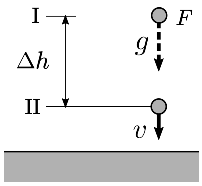
Part C. Neutroncsillag kettős rendszerben (6,0 pont)

Egyes neutroncsillagok olyan pulzárok, amelyek rendszeresen, állandó periódussal bocsátanak ki elektromágneses hullámokat, amelyeket itt az egyszerűség kedvéért „fénynek” nevezünk. A neutroncsillagok gyakran alkotnak kettős rendszereket egy fehér törpével. Tekintsük az 1. ábrán látható csillagkonfigurációt, ahol az **N** neutroncsillagból az **E** Földre irányuló fényimpulzus a kettős rendszer **W** fehér törpéje mellett halad el. Ilyen, a csillag gravitációja által befolyásolt impulzusok mérésével pontos becslést adhatunk **W** tömegére az alábbiakban leírtak szerint, és ez az **N** tömegének becslését adja eredményül.



1. ábra. Elrendezések, amelyekben az x tengely az N-et E-vel összekötő egyenes mentén helyezkedik el. (a) $x_N < 0$ esete; (b) $x_N > 0$ esete.

C.1 Az alábbi ábrának megfelelően állandó g gravitációs gyorsulás mellett tekintsünk két, I-gyel és II-vel jelölt szintet, melyek között $\Delta h (> 0)$ magasságkülönbség van. Tegyünk azonos órákat az I, II helyekre, valamint az F szabadon zuhanó rendszerbe, amelyeket jelölje rendre óra-I, óra-II, illetve óra-F. 1.0pt



A gondolatkísérlet elrendezése

Tegyük fel, hogy egy megfigyelő az óra-F-fel együtt ül és kezdetben ugyanolyan magasságban van, mint az óra-I, továbbá a sebessége nulla. Mivel az órák egyformák, ezért egyenlő hosszúságú időintervallumokat mérnek, azaz $\Delta\tau_F = \Delta\tau_{\mathrm{I}}$. Ezután engedjük az F rendszert szabadon esni, és dolgozzunk az F rendszerében, amit inerciarendszernek tekinthetünk. Ebben a rendszerben az óra-II v sebességgel halad el az óra-F előtt, így az óra-II idődilatációja a Lorentz-transzformációval határozható meg. Amíg az óra-F-en $\Delta\tau_{\mathrm{I}}$, addig az óra-II-n $\Delta\tau_{\mathrm{II}}$ idő telik el.
Határozd meg $\Delta\tau_{\mathrm{II}}$ -t a $\Delta\tau_{\mathrm{I}}$ függvényében $\Delta\phi/c^2$-ben első rendig, ahol a $\Delta\phi = g\Delta h$ a gravitációspotenciál-különbséget, *azaz* az egységnyi tömegre jutó gravitációs potenciális energiát jelenti!

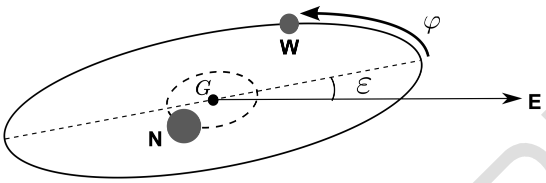
C.2 A ϕ gravitációs potenciál miatti időkésések megváltoztatják a fény végtelenben megfigyelhető c_{eff} effektív sebességét, habár a fény lokális terjedési sebessége c. Ha $\phi(r=\infty) = 0$, akkor c_{eff} ϕ/c^2-ben első rendig a következőképpen adható meg: 1.8pt

$$c_{\text{eff}} \approx \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c$$

beleértve a tértorzulás hatását is, ami a C.1 feladatban nem szerepelt. Megjegyezzük, hogy a fény útja egyenesként közelíthető.
Az 1. (a) ábrának megfelelően, a x tengelyt az **N** neutroncsillagtól az **E** Földig tartó fényút mentén vesszük fel, és az $x = 0$ helyet arra a pontra helyezzük, ahol a **W** fehér törpe a legközelebb van a fényúthoz. Legyen $x_N\,(< 0)$ az **N** x koordinátája, $x_E\,(> 0)$ az **E** x koordinátája, és d a **W** és a fényút közötti távolság. Becsüld meg az **N**-től **E**-ig haladó fény érkezési idejének Δt megváltozását, amelyet az M_{WD} tömegű fehér törpe okoz, és add meg a választ egyszerű formában, elhanyagolva a következő kis mennyiségek magasabb rendű kifejezéseit: $d/|x_N| \ll 1$, $d/x_E \ll 1$, és $GM_{\text{WD}}/(c^2 d) \ll 1$! Ha szükséges, használd a következő formulát:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+d^2}} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{x^2+d^2}+x}{\sqrt{x^2+d^2}-x}\right) + C. \qquad (\log \text{ a természetes logaritmus})$$

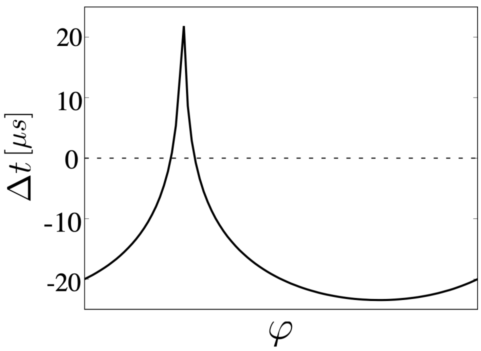
C.3 Az alábbiak szerint feltesszük, hogy a kettőscsillag-rendszerben **N** és **W** a pályasíkban lévő G tömegközéppont körül nulla excentricitású körpályán mozog. Legyen ε a pálya dőlésszöge, ami a pálya síkja és a G középpont **E** felé irányuló egyenese által bezárt szög, és legyen L az **N** és **W** közötti távolság hossza, valamint M_{WD} a fehér törpe tömege. A továbbiakban feltételezzük, hogy $\varepsilon \ll 1$. 1.8pt



A kettőscsillag-rendszer

Az **N**-ből érkező fényimpulzusokat az **N**-től távol lévő **E**-n figyeljük meg. Az **E**-ig tartó fényút az **N** és **W** elhelyezkedésétől függően időben változik. Az impulzusok **E**-re érkezésének idejében fellépő késés $x_N \simeq -L$ esetén maximális, értéke Δt_{max}, és $x_N \simeq L$ esetében minimális, értéke Δt_{min} (lásd az 1. (b) ábrát). Add meg a $\Delta t_{\mathrm{max}} - \Delta t_{\mathrm{min}}$ különbséget olyan egyszerű alakban, amiben figyelmen kívül hagyod a kis mennyiségek magasabb rendű kifejezéseit ugyanúgy, ahogyan azt a **C.2**. pontban tetted! Megjegyezzük, hogy a **W**-től különböző csillagok gravitációjából származó késésekről feltételezzük, hogy a $\Delta t_{\mathrm{max}} - \Delta t_{\mathrm{min}}$ kifejezésben kioltják egymást.

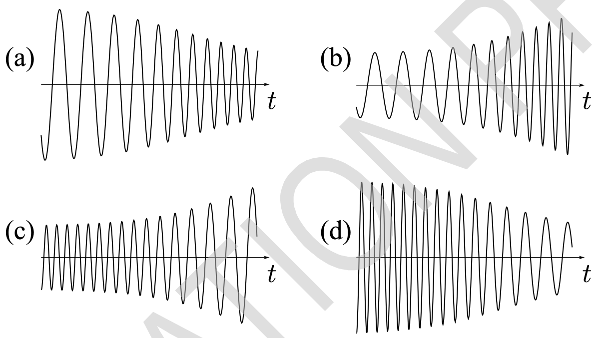
C.4 Az alábbi ábra a megfigyelt időkéséseket mutatja a φ pályafázis függvényében olyan kettőscsillag-rendszer esetén, amelynél $L \approx 6 \times 10^6\,\mathrm{km}$ és $\cos\varepsilon \approx 0.99989$. Becsüld meg M_{WD} értékét $M_\odot$ naptömeg egységben, és add meg az $M_{\mathrm{WD}}/M_\odot$ numerikus eredményt egy értékes jegy pontosan! Itt használhatod a $GM_\odot/c^3 \approx 5\,\mu\mathrm{s}$ közelítő összefüggést. 0.8pt



Megfigyelt Δt időkésések az **N** és **W** helyzetét megadó φ pályafázis (lásd a **C.3** részben lévő ábrát) függvényében

C.5	A neutroncsillagok kettős rendszerében két csillag energiát és perdületet szabadít fel gravitációs hullámok kibocsátásával, és végül az összeütközést követően összeolvadnak. Az egyszerűség kedvéért csak egy R sugarú és ω szögsebességű körmozgást tekintsünk, amiben érvényes az $\omega = \chi R^p$ egyenlet, ahol, a χ állandó – ha a relativisztikus effektusokat elhanyagoljuk – nem függ sem az ω-tól, sem az R-től. Határozd meg p értékét!	0.4pt

C.6 A **C.5**. pontban szereplő kettős rendszer által kibocsátott gravitációs hullám amplitúdója arányos $R^2\omega^2$-tel. Az alábbi ábra kvalitatív módon mutatja a megfigyelt gravitációs hullámok négy különböző időbeli profilját a két csillag ütközése előtt. Válaszd ki az (a)-(d) pontok közül a legmegfelelőbbet! 0.2pt



A gravitációs hullámok megfigyelt adatprofiljai