Testek a víz(b)en (10 pont)

Ebben a feladatban olyan jelenségekkel foglalkozunk, melyeket a víz és más testek közötti kölcsönhatás okoz, és a felületi feszültséghez kapcsolódnak. Az A rész dinamikus, a B és C rész statikus jelenséget tárgyal.

Ha szükséges, felhasználhatod azt a tényt, hogy ha az $y(x)$ függvény kielégíti a $y''(x) = ay(x)$ differenciálegyenletet (a egy pozitív konstans), akkor az általános megoldás $y(x) = Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{-\sqrt{a}x}$, ahol A és B tetszőleges konstansok.

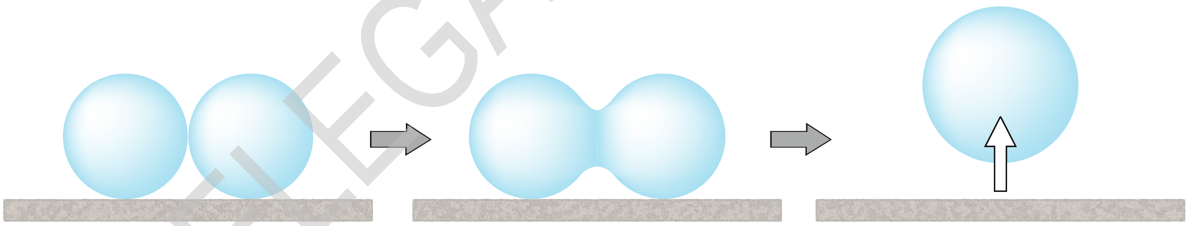
Part A. Vízcseppek egyesülése (2,0 pont)

Az 1. ábrán látható elrendezésben két álló, gömb alakú vízcseppet vizsgálunk egy szuperhidrofób anyag felületén, ami azt jelenti, hogy a víz és a felület között nagyon erős taszító erő lép fel.

Kezdetben két azonos, gömb alakú vízcseppet helyezünk egymás mellé, majd a két csepp egymáshoz érve összeolvad, és egy nagyobb gömb alakú vízcseppet alkot, amely hirtelen felugrik.

A.1 Mindkét vízcsepp egyesülés előtti a sugara $100\ \mu$m. A víz ρ sűrűsége 1.00×10^3 kg/m^3. A γ felületi feszültség 7.27×10^{-2} J/m^2.
Az egyesülés előtti és utáni felületi energiák ΔE különbségének k hányada alakul át a felugró vízcsepp kinetikus energiájává. Határozd meg az összeolvadt vízcsepp v kezdeti felugrási sebességét két értékes számjegy pontossággal, a következő feltételek mellett:
- $k = 0.06$
- Az egyesülés előtt és után a vízcseppek össztérfogata állandó.

2.0pt



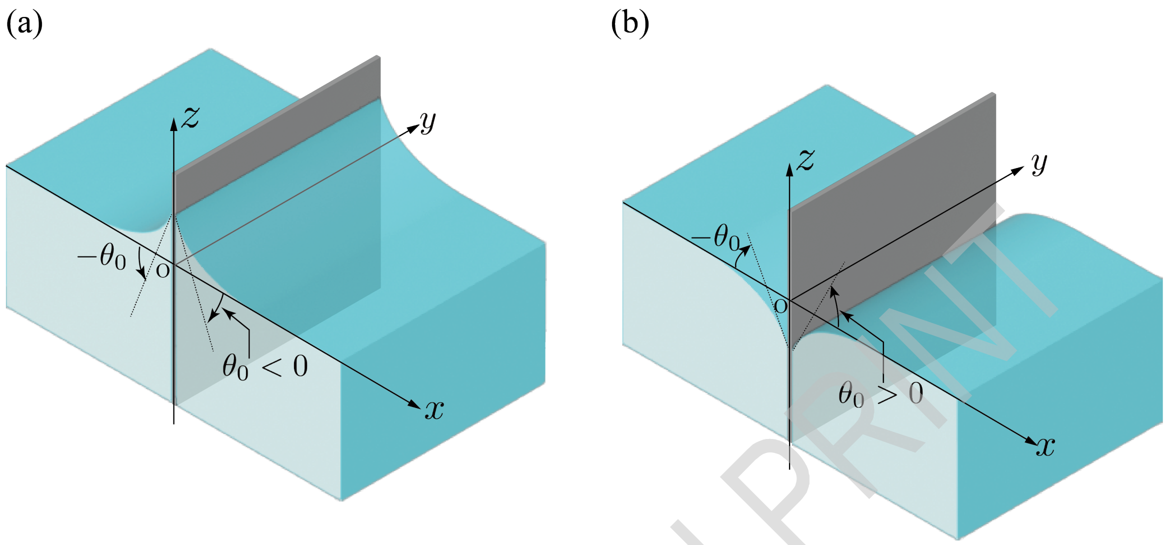
1. ábra: Két vízcsepp egyesülése és az egyesült vízcsepp felugrása

Part B. Függőleges lap a vízben (4,5 pont)

Egy síklapot függőlegesen vízbe merítünk. A 2.(a) és a 2.(b) ábra rendre a hidrofil (vízkedvelő, vonzó) és a hidrofób (víztaszító) anyagból készült lap esetén mutatja a kialakult vízfelszínt. A lap vastagsága elhanyagolható.

A lap az yz síkban van, és tőle távol a vízfelszín pedig az xy síkban helyezkedik el $z = 0$ magasságban. A felület alakja nem függ a y-koordinátától. Legyen $\theta(x)$ a vízfelszín és a vízszintes sík közötti szög a vízfelület (x, z) pontjában, az xz síkban. A $\theta(x)$ szöget a pozitív x tengelytől mérjük, az óramutató járásával ellentétes irányban. Jelölje θ_0 a $\theta(x)$ szög értékét a lap és a vízfelszín érintkezési pontjánál ($x = 0$). A továbbiakban θ_0 egy konstans, ami csak a lap anyagától függ.

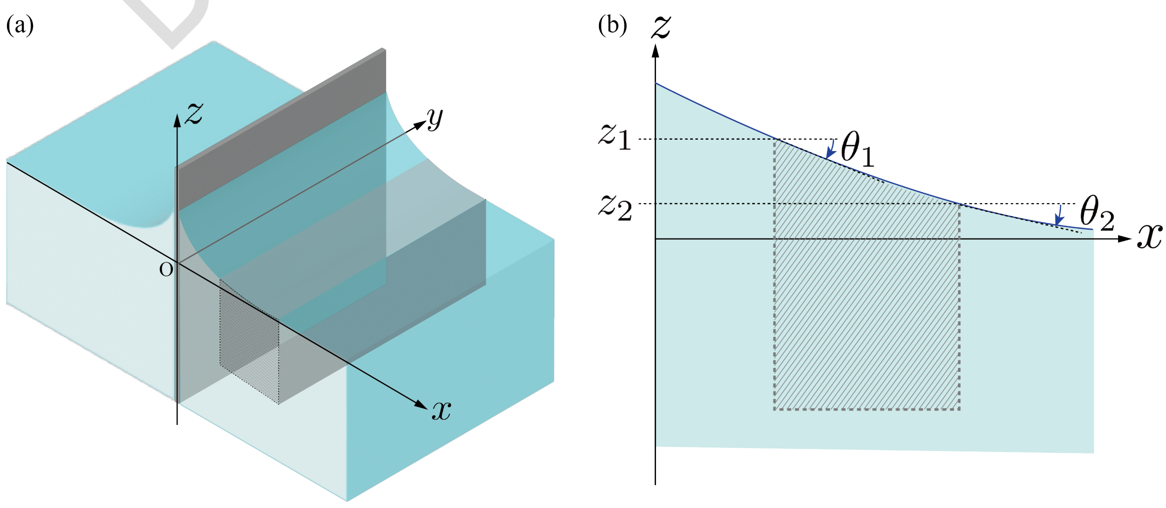
A víz ρ sűrűsége és γ felületi feszültsége mindenütt állandó. A nehézségi gyorsulás g. A P_0 légköri nyomásról is feltesszük, hogy mindenütt azonos. A következő néhány lépésben meghatározzuk a vízfelszín alakját. Megjegyezzük, hogy a felületi feszültség mértékegysége J/m^2 vagy N/m.



2. ábra: A vízbe merített függőleges lapok. (a) hidrofil (vízkedvelő) lap esetében; (b) hidrofób (víztaszító) lap esetében

B.1	Tekintsük a 2.(a) ábrán látható hidrofil (vízkedvelő) lap esetét. Megjegyezzük, hogy a vízben mért P nyomásra teljesül, hogy $z > 0$ esetén $P < P_0$ és $z = 0$ esetén $P = P_0$. Add meg a P víznyomást z függvényében a ρ, g, z és P_0 mennyiségekkel kifejezve!	0.6pt

B.2	Tekintsük a 3.(a) ábrán árnyékolva látható víztömböt, melynek xz síkbeli metszetét a 3.(b) ábra sraffozott része mutatja. Legyen z_1 és z_2 rendre a víztömb és a levegő közötti határvonal (vízfelület) bal és jobb szélső koordinátája. Add meg a környezet nyomásából származó, a víztömb y irányú egységnyi szakaszára ható eredő erőnek a vízszintes (x irányú) f_x komponensét a ρ, g, z_1 és z_2 mennyiségekkel kifejezve! Megjegyezzük, hogy a P_0 légköri nyomás járuléka ehhez az erőhöz zérus.	0.8pt



3. ábra: A felszínnél vizsgált víztömb (a) madártávlatból és (b) keresztmetszetben

B.3 A víztömbre ható felületi feszültséget a B.2. pontban tárgyalt f_x erő ellensúlyozza. Jelölje θ_1, illetve θ_2 a vízfelszín és a vízszintes közötti szöget a tömb bal, illetve jobb szélén. Fejezd ki f_x-et γ, θ_1 és θ_2 segítségével! **0.8pt**

B.4 A következő egyenlet a vízfelszín egy tetszőleges (x, z) pontján érvényes: **0.8pt**

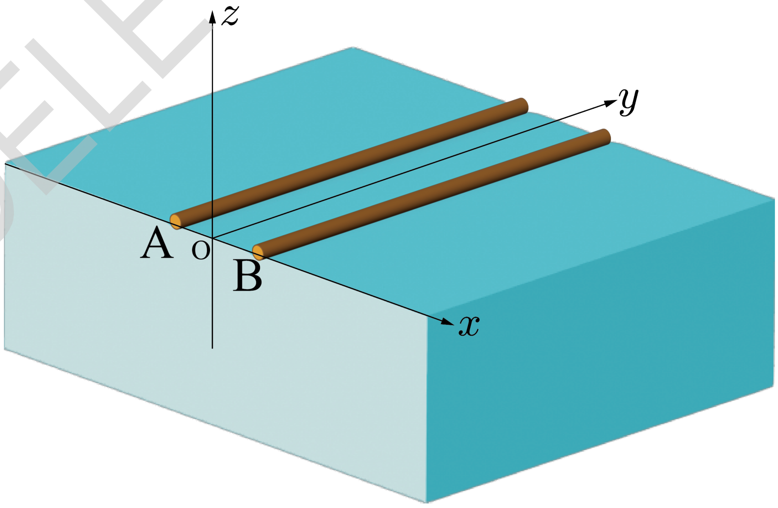
$$\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\ell}\right)^a + \cos\theta(x) = \text{konstans.} \qquad (1)$$

Határozd meg az a kitevőt, valamint az ℓ állandót a γ és a ρ konstansokkal kifejezve! Megjegyezzük, hogy a kapott egyenlet általánosan igaz mind hidrofil, mind hidrofób lap esetén.

B.5 Tételezd fel, hogy a B.4. pont (1) egyenletében a vízfelszín magasságának változása lassú, azaz $|z'(x)| \ll 1$, így a $\cos\theta(x)$ tag sorbafejthető $z'(x)$-szerint másodrendben. Az így kapott egyenletet x szerint differenciálva, $z(x)$-re egy differenciálegyenletet kapsz. Oldd meg ezt a differenciálegyenletet, és add meg a $z(x)$ függvényt $x \geq 0$ esetén $\tan\theta_0$ és ℓ segítségével! Megjegyezzük, hogy a jobb szemléltetés kedvéért a 2. és 3. ábra függőleges irányban túlzó, nem teljesíti a $|z'(x)| \ll 1$ feltételt. **1.5pt**

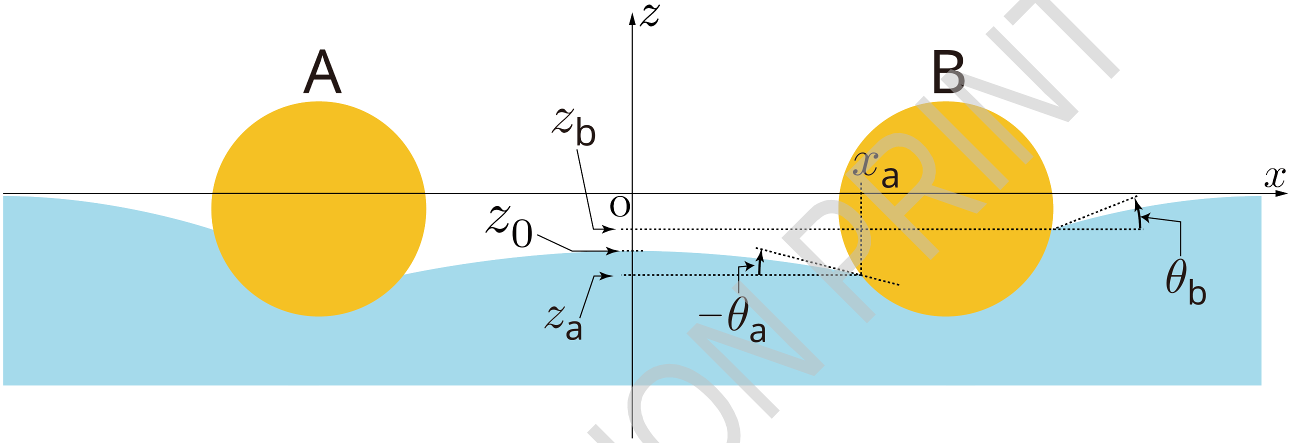
Part C. Rudak a vízen (3,5 pont)

Az azonos anyagból készült, azonos méretű, A és B hengeres rudakat úgy helyezzük el egymással párhuzamosan a vízfelszínen, hogy az y tengelytől azonos távolságra legyenek (4. ábra).



4. ábra: Két hengeres rúd (A és B) lebeg a vízfelszínen

C.1	Az 5. ábrán látható módon definiáljuk a B rúdnak a vízfelszínnel való érintkezési pontjainál a z_a és z_b koordinátákat, valamint a θ_a és θ_b szögeket. Határozd meg a B rúd y-tengely mentén vett egységnyi szakaszára ható F_x vízszintes erőkomponenst a θ_a, θ_b, z_a, z_b, ρ, g és γ mennyiségekkel kifejezve!	1.0pt



5. ábra: Függőleges keresztmetszet két, a vízfelszínen úszó hengeres rúdról

C.2	Jelölje z_0 a vízfelület z koordinátáját a két rúd közötti felezőpontban az xz síkban. Add meg a C.1. pontban kapott F_x erőt a θ_a, θ_b, z_a és z_b használata nélkül!	1.5pt

C.3	Legyen x_a a B rúd és a vízfelszín bal oldali érintkezési pontjának x-koordinátája. A B.4. pontban kapott differenciálegyenlet segítségével fejezd ki a két rúd (A és B) közti felezőpontban a vízfelszín z_0 koordinátáját az x_a és z_a mennyiségekkel! Használhatod a B.4. pontban bevezetett ℓ állandót.	1.0pt