Kunfalvi Rezső Olimpiai Válogatóverseny

1. forduló, elméleti rész

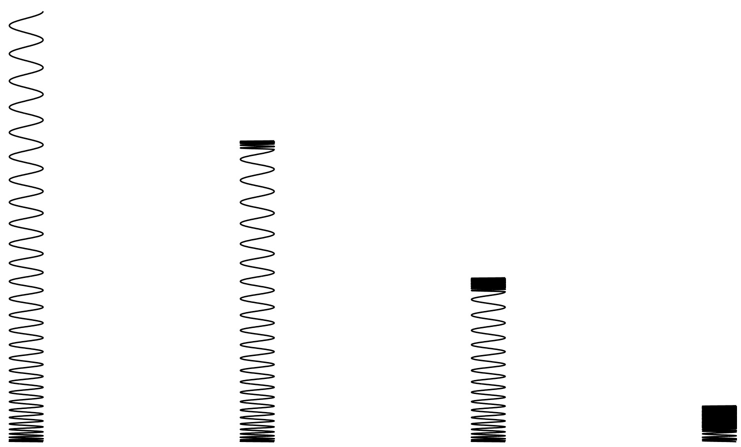
Budapest, 2013. április 22-24.

1. feladat. Ez a feladat három független, kisebb részből áll.

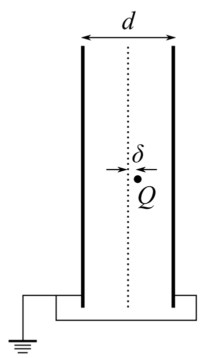
1.A. Slinky. A lépcsőjáró rugó vagy más néven „slinky” egy olyan rugó, melynek nyújtatlan hossza elhanyagolhatóan kicsi, jó közelítéssel követi a Hooke-törvényt, és már a saját súlya hatására is számottevően megnyúlik.

1.A.1. Az asztalon nyugvó, m tömegű slinky-t felső végénél fogva lassan addig emeljük, hogy az alsó vége kicsit elemelkedjen az asztaltól. Ekkor a slinky hossza L. Mekkora munkát végeztünk az emelés közben?

1.A.2. Ha az egyik végénél fellógatott slinky-t elengedjük, a legalsó menet érdekes módon egészen a teljes összecsukódásig nem mozdul meg (lásd az *ábrát*). Mekkora sebességgel kezd esni a slinky közvetlenül a teljes összecsukódás után?



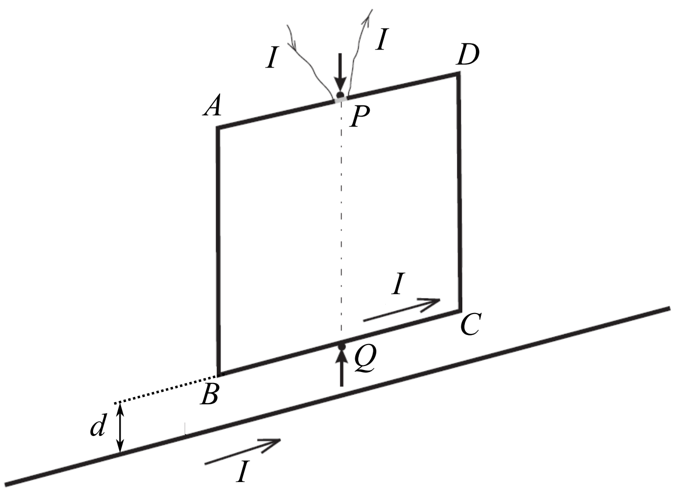
1.B. Ponttöltés kondenzátorban. Egy síkkondenzátor d távolságban lévő lemezeit leföldeljük, majd a lemezek közé Q nagyságú ponttöltést helyezünk.



1.B.1. Mekkora erő hat a ponttöltésre, ha az egyik lemezhez nagyon közel, attól $\delta \ll d$ távolságra helyezkedik el?

1.B.2. Mekkora erő hat a ponttöltésre, ha az a lemezek között félúton elhelyezkedő (képzeletbeli) síktól $\delta \ll d$ távolságra helyezkedik el? (Lásd az *ábrát*!)

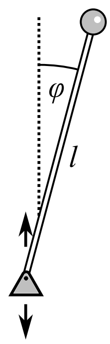
1.C. Vezető keret rezgése. Tömör, ϱ sűrűségű, S keresztmetszetű vezető drótból (majdnem teljes) négyzetet hajlítunk, majd az *ábrán* látható P és Q oldalfelező pontokban tűcsapágyakkal függőlegesen tengelyezzük. A keretbe (a forgását nem akadályozó) vékony, hajlékony drótokon I erősségű áramot vezetünk. A keret alatt, attól d távolságban egy hosszú, egyenes vezető található, melyben ugyancsak I erősségű egyenáram folyik. (d sokkal kisebb a drótkeret oldalhosszánál.)



1.C.1. Vizsgáljuk meg, hogy a keretet kicsiny szöggel kitérítve mekkora visszatérítő forgatónyomaték hat a négyzet AB, BC és AD oldalélein! Hasonlítsuk össze az M_{AB}, M_{BC}, M_{AD} forgatónyomatékok nagyságrendjét és a választ relációjelekkel kifejezve írjuk be a válaszlap megfelelő mezőjébe! (A kitérés olyan kicsi, hogy a keret alsó sarkainak elmozdulása d-nél sokkal kisebb.)

1.C.2. A visszatérítő forgatónyomatékban csak a vezető rendű tagot megtartva határozzuk meg, mekkora periódusidejű mozgást végez a keret, ha kicsit kitérítjük egyensúlyi helyzetéből! Számítsuk ki az eredményt numerikusan is! *Adatok:* $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am, $\varrho = 8960$ kg/m^3, $S = 1{,}5$ mm^2, $d = 1$ cm, $I = 10$ A.

2. feladat. Kapica-inga



Egy súlyos, kicsiny gömbből és egy hozzá képest elhanyagolható tömegű, egyik végén tengelyezett, l hosszúságú merev rúdból ingát készítünk. Az inga legalsó helyzetében stabil egyensúlyban van, a legfölső helyzete viszont közismerten instabil: innen elengedve azonnal eldől, akár egy hegyére állított ceruza. Ha azonban az inga felfüggesztési pontját függőlegesen, kis amplitúdóval, nagy frekvenciával rezgetjük, az inga legfelső, $\varphi = 0°$-os helyzete stabillá válhat. A jelenség magyarázatát 1951-ben a Nobel-díjas szovjet fizikus, Pjotr Kapica adta meg. Ebben a feladatban a „fejenálló" inga stabilizálásához szükséges feltételeket fogjuk meghatározni kétféle időfüggésű rezgetés esetére.

2.A. rész

Ebben a részben a felfüggesztési pontot függőlegesen úgy rezgetjük, hogy sebessége az idő függvényében periodikusan, háromszögjel szerint változzon. A rezgés periódusidejét T-vel jelölve a felfüggesztési pont gyorsulását tehát az

$$a(t) = \begin{cases} +a_0, & \text{ha } (n - \frac{1}{4})T < t < (n + \frac{1}{4})T \\ -a_0, & \text{ha } (n + \frac{1}{4})T < t < (n + \frac{3}{4})T \end{cases}$$

függvénnyel adhatjuk meg, ahol n egész szám, a pozitív irányt pedig függőlegesen felfelé választottuk. A gravitáció hatását a **2.A.1.**, **2.A.2.** és **2.A.3.** feladatokban teljesen hanyagoljuk el!

2.A.1. Az ingát a legfelső helyzetéből kicsiny $\varphi_0 \ll 1$ szöggel kitérítjük, majd a $t = 0$ időpillanatban kezdősebesség nélkül elengedjük. Ábrázoljuk az inga φ kitérését az idő függvényében és határozzuk meg a kezdőállapothoz viszonyított maximális $\Delta\varphi$ szögeltérülést! Tegyük fel, hogy $\Delta\varphi \ll \varphi_0$! *Segítség:* Üljünk bele a felfüggesztési ponttal együttmozgó koordinátarendszerbe!

2.A.2. Az előző feladatbeli közelítéseket felhasználva határozzuk meg az inga helyzetét jellemző φ szög egy periódusra vett $\langle\varphi(t)\rangle$ időátlagát, valamint az ettől az értéktől való átlagos eltérést, azaz a $\langle|\varphi(t) - \langle\varphi(t)\rangle|\rangle$ mennyiséget!

2.A.3. Az előző feladat eredményét felhasználva határozzuk meg az ingára ható forgatónyomaték egy periódusra vett $\langle M\rangle$ időátlagát a felfüggesztési ponthoz rögzített vonatkoztatási rendszerben!

2.A.4. Most vegyük figyelembe a gravitáció hatását is! Feltételezhetjük, hogy $g \ll a_0$, így az inga gravitáció hatására bekövetkező szögkitérése sokkal kisebb, mint a **2.A.3.** feladatban meghatározott $\Delta\varphi$ érték. Írjunk föl egy egyenletet, amely leírja az inga egy periódusra vett átlagos $\langle\varphi\rangle$ kitérésének időbeli változását! (Az egyenletet nem kell megoldani.)

2.A.5. Az előző feladatban kapott egyenlet felhasználásával határozzuk meg, milyen egyenlőtlenségnek kell fennállnia g, l, a_0 és a rezgés T periódusideje között ahhoz, hogy az inga legfelső helyzete stabil legyen!

2.B. rész

Ebben a részben a felfüggesztési pontot függőlegesen harmonikus időfüggéssel rezgetjük úgy, hogy gyorsulását az idő függvényében az $a(t) = a_0 \sin(\omega t)$ kifejezés adja meg.

2.B.1. Írjunk föl egy egyenletet, amely leírja az inga φ kitérésének időbeli változását a felfüggesztési ponthoz rögzített koordináta-rendszerben! Az egyenletet nem kell megoldani.

2.B.2. Tegyük fel, hogy az inga $\varphi(t)$ szögkitérésének időfüggése két részre bontható: egy gyorsan oszcilláló részre és egy lassan változó, nem oszcilláló részre, azaz

$$\varphi(t) = A(t)\sin(\omega t) + B(t),$$

ahol $A(t)$ és $B(t)$ sokkal lassabban változó függvények, mint $\sin(\omega t)$. Ezt a próbamegoldást a **2.B.1.** feladatban kapott egyenletbe helyettesítve és a $g \ll a_0 \ll l\omega^2$ közelítéseket alkalmazva fejezzük ki $A(t)$-t $B(t)$, a_0, ω és g felhasználásával!

2.B.3. Az eddigi közelítéseket alkalmazva írjunk föl egy egyenletet $B(t)$ időbeli változására, majd g, l és a_0 segítségével fejezzük ki, milyen egyenlőtlenségnek kell fennállnia az ω körfrekvenciára ahhoz, hogy az inga legfelső helyzete stabil legyen!

3. feladat. Mágneses hűtés

Emil Warburg német fizikus 1881-ben kimutatta, hogy bizonyos anyagok felmelegednek, ha mágneses térbe helyezik őket, illetve lehűlnek, ha megszűnik a mágneses tér. Egyes fémek, ötvözetek erősen mutatnak ilyen, úgynevezett magnetokalorikus viselkedést, így ezek az anyagok a XX. század első felében új hűtési eljárások kidolgozását tették lehetővé. Mágneses hűtésen alapuló berendezéseket napjainkban is kiterjedten használnak az alacsonyhőmérsékleti szilárdtestfizikai kutatások területén.

Külső térbe helyezve a mágneses viselkedést mutató anyagok felmágnesezhetők. Ennek mértékét az $\mathbf{M}$ mágnesezettséggel írjuk le, amely nem más, mint a mágneses momentumsűrűség, azaz az anyag egységnyi térfogatának mágneses momentuma. A külső mágneses tér erősségét a szokásos indukcióvektor helyett a $\mathbf{H}$ mágneses térerősséggel jellemezzük.[1]

Tekintsünk egy mágneses szempontból homogén, ideális paramágneses anyagot! A továbbiakban feltehesszük, hogy a $\mathbf{H}$ és $\mathbf{M}$ vektorok egyirányúak és a paramágnesen belül függetlenek a helytől, ezért a $|\mathbf{H}| = H$ és $|\mathbf{M}| = M$ skaláris mennyiségeket fogjuk használni. A T abszolút hőmérsékletű, H erősségű térbe helyezett ideális paramágnes állapotegyenlete jó közelítéssel

$$M = \frac{\gamma H}{T}, \tag{1}$$

ahol γ pozitív állandó. Ismert továbbá, hogy a paramágneses anyag belső energiája (az ideális gázokéhoz hasonlóan) kifejezhető *csak* a hőmerséklet függvényeként. Az első főtétel a mágneses anyag kicsiny állapotváltozására a

$$\delta U = \delta Q + \mu_0 H \delta M \tag{2}$$

alakot ölti, ahol δU az anyag egységnyi térfogatának belső energiaváltozása, δQ a közölt hő, δM pedig a mágnesezettség kis megváltozása.

3.1. A γ, H és T paraméterek felhasználásával adjuk meg, hogy mennyi az ideális paramágneses anyagunk állandó térerősség, illetve állandó mágnesezettség mellett vett (egységnyi térfogatra vonatkoztatott) hőkapacitásának $C_H - C_M$ különbsége!

3.2. Határozzuk meg, hogy mekkora δT értékkel változik meg a paramágnes hőmérséklete, ha a külső mágneses tér értékét hirtelen (adiabatikusan) kicsiny δH értékkel megváltoztatjuk? A végeredményt C_H, γ, H és T felhasználásával adjuk meg!

3.3. A mérések szerint kis terekre ($H \to 0$) az ideális paramágnes hőkapacitása (állandó mágnesezettség mellett) $C_M = \alpha/T^2$, ahol α állandó. Hogyan változik a kezdetben T_1 hőmérsékletű, H_1 erősségű mágneses térben lévő anyag hőmérséklete, ha a térerősséget hirtelen $H_2 (< H_1)$ értékre csökkentjük? Vizsgáljuk az $\alpha \to 0$ határesetet is!

[1] Vákuumban a mágneses térerősség és az indukció között csak egy μ_0-os szorzótényező a különbség, mágnesezhető anyagokban azonban $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$.

3.4. A paramágnes úgy használható fel hűtésre, hogy körfolyamatot végeztetnek vele két hőtartály között. A „melegebb” hőtartály nagy hőkapacitású, a hidegebb hőtartály (azaz a lehűtendő térrész) pedig kis hőkapacitású.[2] Az egyik lehetséges körfolyamat a Carnot-folyamat, amely négy szakaszból áll. Az első szakaszban a mágneses teret viszonylag kis értékről adiabatikusan növelni kezdjük, majd a második szakaszban állandó hőmérsékleten tovább növeljük a térerősséget. A harmadik szakaszban a térerősséget adiabatikusan lecsökkentjük, végül a negyedik szakaszban tovább csökkentjük állandó hőmérséklet mellett. Ábrázoljuk *vázlatosan* a Carnot-körfolyamatot a $H - M$ síkon és tüntessük fel, mely szakaszokon van hőfelvétel, illetve hőleadás!

3.5. A Carnot-ciklus során a mágneses térerősség legnagyobb és legkisebb értéke H_{min} és H_{max}, az ezekhez tartozó mágnesezettség értékek pedig M_{min} és M_{max}. Mekkora a hűtési folyamat jósági tényezője, azaz a hidegebb hőtartályból elvont hő és a befektetett munka hányadosa?

[2] Általában a melegebb hőtartály is elég alacsony hőmérsékletű (néhány K), amit más hűtési eljárásokkal érnek el. A mágneses hűtés segítségével innen a néhány század vagy ezred kelvines hőmérséklet is elérhető.)