Fontos tudnivalók

- Az elméleti forduló időtartama 5 óra. A feladatok hibátlan megoldásával összesen 450 pontot lehet szerezni, a részpontszámok az egyes kérdések után zárójelben fel vannak tüntetve. Figyelem! Az összes feladathoz egyetlen, közös adattáblázat tartozik, ami a feladatokban szereplő konstansokat, fizikai állandókat tartalmazza (lásd a lap alját).
- A részletes számolásokat a rendelkezésre álló fehér lapokon végezd! Az egyéb (füzetből kitépett, négyzetrácsos stb.) lapra írt megoldásokat nem tudjuk értékelni. Lehetőleg minél kevesebb szöveget használj, megoldásaidat igyekezz főleg egyenletekkel, számokkal, szimbólumokkal és grafikonokkal kifejezni! Ha azt szeretnéd, hogy megoldásod egy része ne kerüljön értékelésre, tedd zárójelbe azt a részt, és egy vonallal húzd át! (Az áthúzott, de helyes megoldást nem tudjuk értékelni.)
- Minden lapra írd rá a nevedet! Ügyelj rá, hogy *minden feladat megoldása külön lapra kerüljön*, mert a különböző feladatokat más-más javító fogja értékelni.
- Végeredményeidet a feladatokhoz tartozó válaszlap megfelelő mezőjébe is írd be! Mindenképp szakíts időt a válaszlap kitöltésére! Azon feladatokhoz tartozó mezőket, amelyekkel érdemben nem foglalkoztál, hagyd üresen!
- A verseny teljesen egyéni. A feladatok megoldásához író- és rajzeszközökön, valamint kétsoros (nem grafikus) számológépen kívül semmilyen segédeszköz (könyv, füzet, internet, számítógép, mobiltelefon stb.) nem használható.

Fizikai állandók táblázata

vákuumbeli fénysebesség:	$c = 2{,}998 \cdot 10^8$ m/s
a vákuum permeabilitása:	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am
gravitációs állandó:	$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m^3/(kg s^2)
proton tömege:	$m_p = 938{,}3$ MeV/c^2
neutron tömege:	$m_n = 939{,}6$ MeV/c^2
pion tömege:	$m_\pi = 139{,}6$ MeV/c^2
Föld átlagos sugara:	$R_{\text{Föld}} = 6{,}371 \cdot 10^6$ m
Föld tömege:	$m_{\text{Föld}} = 5{,}972 \cdot 10^{24}$ kg
Föld tehetetlenségi nyomatéka:	$\Theta_{\text{Föld}} = 8{,}04 \cdot 10^{37}$ kgm^2
Hold sugara:	$R_{\text{Hold}} = 1{,}737 \cdot 10^6$ m
Hold tömege:	$m_{\text{Hold}} = 7{,}348 \cdot 10^{22}$ kg
átlagos Föld-Hold távolság:	$L = 3{,}844 \cdot 10^8$ m
a Hold keringési ideje:	$T_{\text{Hold}} = 27{,}32$ nap
a müon giromágneses faktora:	$\gamma_\mu = 8{,}48 \cdot 10^8$ Hz/T

Kunfalvi Rezső Olimpiai Válogatóverseny

1. forduló, elméleti rész

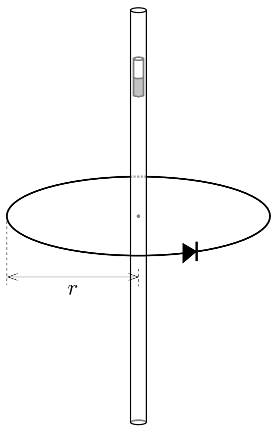
Budapest, 2014. április 14.

1. feladat. Ez a feladat három független, kisebb részből áll. (50 p + 50 p + 50 p)

1.A. $T_1 = 100$ K hőmérsékletű környezetben egy levegővel telt, zárt tartály helyezkedik el. A tartályban lévő levegőt egy ideális Carnot-gépnek tekinthető hűtőgéppel szeretnénk minél alacsonyabb hőmérsékletűre hűteni. Maximális hűtési fokozaton (amikor a hűtőgép az általa felvehető legnagyobb elektromos teljesítményt veszi fel) a tartályban $T_2 = 50$ K hőmérsékletet sikerül elérni. Mekkora T_2' értékű lenne a tartályban elérhető legalacsonyabb hőmérséklet, ha a környezet hőmérséklete $T_1' = 200$ K lenne? (A hűtőgép ebben az esetben is maximális fokozaton működik, a hősugárzás elhanyagolható.)

1.B. R ellenállású drótból és egy ideálisnak tekinthető diódából r sugarú zárt karikát készítünk. A karikát vízszintes síkban tartjuk, a középpontján pedig egy függőleges tengelyű, hosszú üvegcsövet vezetünk át az *ábra* szerint. Mekkora töltés halad át a diódán, ha az üvegcsőbe m dipólnyomatékú, kicsiny mágnesrudat ejtünk?

(A vezető karika önindukciója elhanyagolható. Az ideális dióda az áramot az egyik irányban ellenállás nélkül átengedi, míg a másik irányban szakadásként működik.)



1.C. Kísérletekben általában úgy állítanak elő pionokat (π^+), hogy nagy hidrogéntartalmú anyagra nagyenergiás protonnyalábot irányítanak, melynek következtében az állónak tekinthető hidrogénmagok és a beérkező gyors protonok között a következő reakció megy végbe:

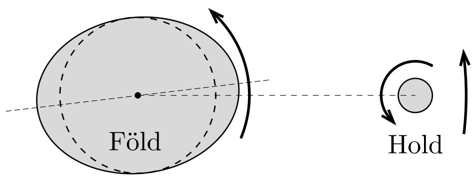
$$p^+ + p^+ \longrightarrow p^+ + n^0 + \pi^+.$$

Legalább mekkora *kinetikus* energiával kell rendelkeznie a beeső protonoknak, hogy a fenti reakció végbemenjen? A választ adjuk meg paraméteresen is a proton m_p tömegével, a neutron m_n tömegével, a pion m_π tömegével, valamint a c vákuumbeli fénysebesség felhasználásával!

A fizikai állandók ismeretében határozzuk meg a minimális kinetikus energiát MeV egységekben!

2. feladat. A Föld és a Hold mozgásának szinkronizálódása. (150 p)

Közismert tény, hogy a Hold mindig ugyanazt az oldalát mutatja a Föld felé. Ez az érdekesség nem véletlen egybeesés, hanem a Föld által a Holdra ható árapályerők közvetlen következménye: az árapályerők ugyanis az idők folyamán folyamatosan fékezték a Hold tengelykörüli forgását egészen addig, amíg annak periódusideje egyenlővé vált a Föld körüli keringésének periódusidejével.



Teljesen hasonló fékezési mechanizmus miatt a Föld tengelykörüli forgása is lassul, melynek magyarázata a következő. A Hold nagyobb gravitációs vonzóerőt fejt ki a Föld azon pontjaira, amelyek a Holdhoz közelebb helyezkednek el, mint azokra a pontokra, amelyek a Holdtól távolabb vannak. Ennek következtében a Föld (nagyon kicsiny mértékben) „megnyúlik”, forgási ellipszoiddá alakul (lásd az *ábrát*). Az ellipszoid nagytengelye azonban a Föld kőzeteinek belső súrlódása és a Föld tengelykörüli forgása következtében nem a Hold aktuális irányába mutat, hanem ahhoz képest folyamatosan „siet”. Az így keletkezett dudorokra a Hold gravitációs tere forgatónyomatékot gyakorol, ami lassítja a Föld forgását.

Figyelem! A következő feladatok során a Föld Nap körüli mozgásától tekintsünk el! Mindvégig használjuk azt a közelítést, hogy a földi Egyenlítő, a Hold egyenlítője és a Hold pályasíkja egy síkban van! A Föld tömegeloszlása nem egyenletes, tömegközéppontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát az adattáblázat tartalmazza. A Holdat tekinthetjük homogén tömegeloszlású gömbnek, a holdpályát pedig kör alakúnak.

2.1. A Föld-Hold rendszer perdülete négy tag összegeként számolható. Ezek rendre a Földnek a tengelye körüli forgásából származó $N_{\text{saját}}^{\text{Föld}}$ sajátperdülete, a Föld közös tömegközéppont körüli keringésből származó $N_{\text{pálya}}^{\text{Föld}}$ pályaperdülete, a Hold $N_{\text{saját}}^{\text{Hold}}$ sajátperdülete, illetve a Hold $N_{\text{pálya}}^{\text{Hold}}$ pályaperdülete. Határozzuk meg a négy tag számszerű értékét! (20 p)

2.2. A Föld-Hold rendszer pálya- és sajátperdületéből csak a két legdominánsabb tagot megtartva határozzuk meg, hogyan aránylik egymáshoz a Föld és a Hold mozgási energiájának $\Delta E_{\text{kin}}/\Delta t$ csökkenési üteme! A választ adjuk meg paraméteresen (a Hold keringésének Ω szögsebességével és a Föld tengelykörüli forgásának ω szögsebességével kifejezve), és számszerűen is! (50 p)

Útmutatás: A Föld-Hold távolság olyan lassan változik, hogy a mozgás során a Hold pályája mindvégig körnek tekinthető.

2.3. Az Apolló-program keretében többek között lézertükröt is juttattak a Holdra. Az ezzel végzett igen pontos mérések szerint a Hold évente 3,8 cm-t távolodik a Földtől. A mért adat alapján becsüljük meg, mennyit változik a Föld mozgási energiája és a Hold mozgási energiája évente! (30 p)

2.4. A számítások szerint az árapályerők fékezési hatása következtében hosszú idő elteltével a Föld is mindig ugyanazt az oldalát fogja a Hold felé mutatni, a két égitest forgása és egymás körüli keringése szinkronizálódik. Hányszorosára fog növekedni addigra a földi nap hossza? (30 p)

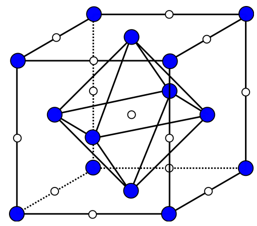
2.5. A teljes szinkronizáció befejeződésekor mekkora lesz a Föld és a Hold közötti távolság? (20 p)

Megjegyzés. A Naprendszerben több példát is találhatunk olyan égitest-párokra, melyeknél a teljes szinkronizáció már bekövetkezett. Az egyik legismertebb a Plútó törpebolygó és egyetlen holdja, a Charon.

3. feladat. Müon spin rotáció (μSR) (150 p)

A müonok töltött elemi részecskék, amelyek elsősorban a kozmikus sugárzás hatására keletkeznek a légkör felsőbb rétegeiben. A tömegük 206-szor nagyobb az elektron tömegénél, töltésük szempontjából pedig kétfélék lehetnek: létezik pozitív müon (μ^+) és negatív müon (μ^-), melyek egymás antirészecskéi, töltésük nagysága pedig az elemi töltés. A kísérleti szilárdtestfizikában a pozitív müonoknak jóval nagyobb jelentőségük van, mint antirészecskéiknek.

Ebben a feladatban a müon spin rotációnak (röviden μSR) nevezett kísérleti módszerrel ismerkedünk meg, amelynek segítségével a kristályos anyagok belsejében jelenlévő mágneses teret lehet megmérni a μ^+-részecskék segítségével. Ha egy kristályos szerkezetű, szilárd anyagba μ^+-részecskét juttatunk, akkor a müon (a kristályt alkotó, pozitív töltésű rácsionok hatására) a rácspontok közötti, ún. intersticiális (rácsközi) helyekre kényszerül (lásd az *1. ábrát*). Ezen a helyen a müon mágneses momentuma kölcsönhatásba lép a rácsközi helyen jelenlévő, a környező rácsionok által keltett mágneses térrel, így a müon mikroszkopikus magnetométerként használható. A kristályban jelenlévő hosszú távú rend miatt a rácsközi helyek egyenértékűek, ezért a mágneses tér nagysága és iránya minden intersticiális helyen azonos.



1. ábra. A nikkel kristály elemi cellája. A fekete körök jelzik a Ni atomokat, az üres körök pedig az intersticiális (rácsközi) helyeket, ahova a müonok beülhetnek.

3.1. Tekintsünk egy klasszikus, homogén tömegeloszlású, egyenletesen töltött, tömör szigetelő golyót, melynek tömege M, töltése pedig Q! Ha a golyót a tömegközéppontja körül forgásba hozzuk, a golyó $\boldsymbol{m}$ mágneses momentumra tesz szert, melynek nagysága arányos a golyó $\boldsymbol{S}$ sajátperdületével:

$$\boldsymbol{m} = \gamma \boldsymbol{S}.$$

Adjuk meg a γ tényező értékét Q és M segítségével! (20 p)

3.2. A forgó, töltött golyót homogén, $\boldsymbol{B} = (0, 0, B_0)$ indukciójú mágneses térbe helyezzük úgy, hogy kezdetben mágneses momentuma

$$\boldsymbol{m}(0) = m_0(\sin\varphi, 0, \cos\varphi)$$

legyen, ahol φ a mágneses tér iránya és a mágneses momentum iránya által bezárt szög. Határozzuk meg a golyó mágneses momentumát a mágneses térbe helyezést követően t idő múlva, azaz az

$$\boldsymbol{m}(t) = (m_x(t), m_y(t), m_z(t))$$

mennyiséget! A választ γ, B_0, m_0 és φ felhasználásával adjuk meg! (30 p)

Útmutatás: Homogén, $\boldsymbol{B}$ indukciójú mágneses térbe helyezett $\boldsymbol{m}$ mágneses momentumra $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$ forgatónyomaték hat.

3.3. A μ^+-részecske mágneses térbeli viselkedése úgy írható le, mintha egy klasszikus, töltött, forgó golyó lenne $\boldsymbol{S}$ sajátperdülettel és $\boldsymbol{m}$ mágneses momentummal. A müon mágneses momentuma is arányos a sajátperdületével (spinjével): $\boldsymbol{m} = \gamma_\mu \boldsymbol{S}$, az arányossági tényező azonban $\gamma_\mu = 8{,}48 \cdot 10^8$ Hz/T, a müon ún. giromágneses faktora. (A müon esetében γ_μ nem számolható olyan egyszerűen, mint a **3.1.** alfeladatban.)

Határozzuk meg a müon mágneses momentumának kezdeti ($t = 0$) iránya és a mágneses momentum t. időpillanatbeli iránya által bezárt $\alpha(t)$ szöget! A lokális mágneses tér az intersticiális helyen $\boldsymbol{B} = (0, 0, B_0)$, a müon kezdeti mágneses momentuma pedig $\boldsymbol{m}(t=0) = m_0(\sin\varphi, 0, \cos\varphi)$. A választ γ_μ, B_0, m_0 és φ segítségével adjuk meg! (20 p)

3.4. Az intersticiális helyen lévő müon a kristályba juttatása után előbb-utóbb pozitronra (e^+), elektron-neutrínóra (ν_e) és müon-antineutrínóra ($\overline{\nu}_\mu$) bomlik:

$$\mu^+ \longrightarrow e^+ + \nu_e + \overline{\nu}_\mu.$$

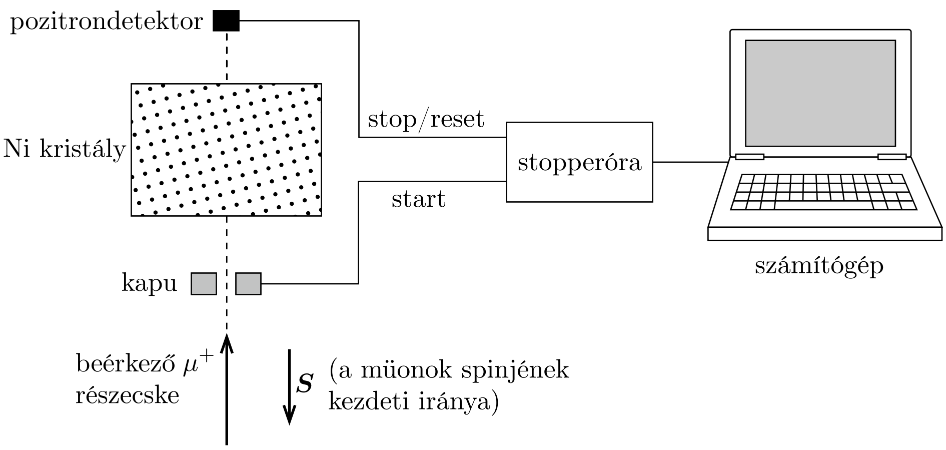
A pozitron kibocsátási irányának valószínűségeloszlása nem gömbszimmetrikus: legnagyobb eséllyel a müon pillanatnyi spinjével megegyező irányban repül ki a pozitron, míg a legkisebb valószínűsége a spin irányával ellentétes irányban történő kibocsátásnak van. Annak valószínűsége, hogy a pozitron kibocsátási iránya a müon spinjével ϑ szöget bezáró irányban elhelyezkedő kicsiny $\delta\Omega$ térszögbe essen

$$P(\vartheta, \delta\Omega) = w\left(1 + \frac{1}{3}\cos\vartheta\right)\delta\Omega,$$

ahol w egy dimenziótlan paraméter. Határozzuk meg w értékét! (20 p)

3.5. A *2. ábrán* egy valódi μSR-kísérlet vázlatos rajza látható. Amikor a rögzített irányból beérkező müon áthalad a kapun, a stopperóra elindul, a müon pedig beépül a kristályrács egy intersticiális helyére. Egy idő után a beépült müon elbomlik, a keletkező pozitron pedig kicsiny (de nem zérus) eséllyel eltalálja az ábrán látható detektort. Ekkor a stopperóra megáll és lenullázódik, a mért időtartam eltárolódik a számítógépen, és egy újabb müont lőnek be a kristályba. (Azokat az eseményeket, amelyekben a müon mégsem épül be a kristályrácsba, vagy a keletkező pozitron nem találja el a detektort, egy –az ábrán nem jelölt– speciális áramkör segítségével automatikusan kiszűrik.)

A beérkező müonok (az előállítási módjukból adódóan) tökéletesen polarizáltak, azaz spinjük minden esetben ellentétes irányú a belövés irányával. Ez azt jelenti, hogy a kristályrácsba történő beépülés (vagyis a stopper indulásának) pillanatában a müonok spinje mindig ugyanolyan irányú.



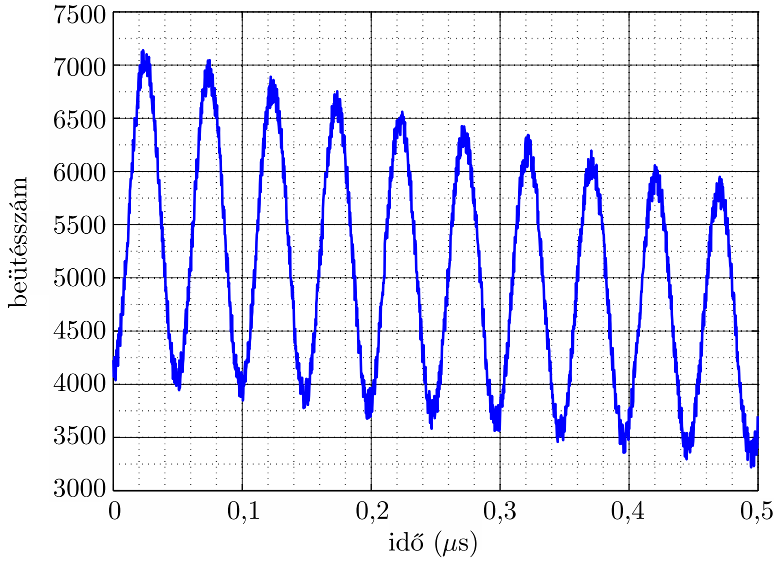
2. ábra

Több millió müon belövése után a számítógép összegyűjti a beérkezett időtartamokat, és hisztogramot készít belőlük (*3. ábra.*). A hisztogram úgy készül, hogy a $t = 0$ és a leghosszabb mért időtartam közötti időablakot kicsiny, egyenlő (mondjuk 1 ns) hosszúságú intervallumokra osztjuk, majd megszámoljuk, hogy hány darab müon bomlott el a betáplálást követően az adott (például a 100 ns és 101 ns közötti) időintervallumban. A hisztogram tehát a kísérleti berendezés által mért elbomlási időtartamok előfordulási gyakoriságát mutatja.

A *3. ábrán* látható hisztogram segítségével határozzuk meg a nikkel kristály intersticiális helyein észlelhető B_0 lokális mágneses indukció nagyságát tesla egységekben! (20 p)

3.6. A *3. ábra* segítségével határozzuk meg a müonok T_μ felezési idejét! (20 p)

3.7. A mérési adatok alapján adjunk becslést a lokális mágneses tér iránya és a beérkező müonok spinjének iránya közötti φ szög nagyságára! Lehet-e ez kétféle érték? (20 p)



3. ábra