

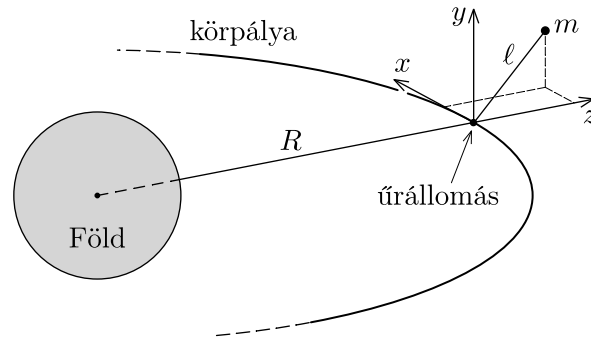
1. Inga a Nemzetközi Űrállomáson (10 pont)

Ebben a feladatban egy szokatlan ingát tanulmányozunk, amelynek felfüggesztése a Föld körül R sugarú körpályán keringő Nemzetközi Űrállomáshoz van rögzítve. Az inga egy elhanyagolható tömegű, ℓ hosszúságú rúdból és egy m tömegű, pontszerű nehezékből áll, amely jóval kisebb az űrállomás tömegénél. A Föld tömegét jelölje M .

1.1. Fejezzük ki a Nemzetközi Űrállomás Ω keringési szögsebességét M , R és a γ gravitációs állandó segítségével!

(0,5 p)

Az űrállomáson utazó asztronauták az $\ell \ll R$ hosszúságú rúdingát az állomás burkolatának tetszőleges pontjához rögzíteni tudják. Tegyük fel, hogy az űrállomás pontszerű az ingához képest! A koordináta-rendszer középpontját rögzítsük az inga űrállomással együtt mozgó felfüggesztési pontjához. Az x -tengely mutasson az űrállomás pillanatnyi sebességének irányába, a z -tengely pedig álljon a keringési síkban radiálisan kifelé (lásd az *ábrát*!)



Az űrhajósok az inga különböző egyensúlyi helyzetei körüli kis lengések periódusidejét vizsgálják. Az inga mozgásának a fent megadott, gyorsuló koordináta-rendszerben való leírásához tehetetlenségi erők (centrifugális erő és Coriolis-erő) bevezetésére van szükség. Megmutatható, hogy a kis lengések vizsgálatánál a Coriolis-erő szerepe elhanyagolható, ezért ezt a továbbiakban hagyjuk figyelmen kívül!

1.2. Adjuk meg az ingatestre ható gravitációs erő x , y és z komponenseit lineáris rendben m , Ω , R , valamint az ingatest x , y , z koordinátái segítségével!

(2,0 p)

1.3. Adjuk meg az ingatestre ható centrifugális erő x , y és z komponenseit lineáris rendben m , Ω , R , valamint az ingatest x , y , z koordinátái segítségével!

(1,5 p)

1.4. Írjuk fel az ingatest mozgásegyenlet-rendszerét (azaz a koordináták időfüggésére vonatkozó differenciálegyenleteket) Ω , valamint a koordináták és azok deriváltjai segítségével!

(3,0 p)

A kapott mozgásegyenletek általános megoldása igen bonyolult. Ennél egyszerűbb feladat az egyensúlyi helyzetek megkeresése.

1.5. Adjuk meg az ingatest lehetséges egyensúlyi helyzeteinek x , y és z koordinátáit! Az eredményeket írjuk be a válaszlapon található táblázat megfelelő oszlopaiba!

(1,0 p)

Az űrhajósok minden egyensúlyi helyzet körül tanulmányozzák az inga kis kitérésű viselkedését is, mégpedig minden lehetséges főirányban¹.

1.6. Mely egyensúlyi helyzetek stabilak, és melyek instabilak? Minden stabil főirány esetén adjuk meg az inga kis lengéseinek körfrekvenciáját Ω segítségével! Az eredményeket írjuk be a válaszlapon található táblázat megfelelő oszlopaiba!

(2,0 p)

¹Főirányoknak nevezzük azokat az irányokat, melyek mentén az ingatest kis kitérésű mozgása első rendben egydimenziós.

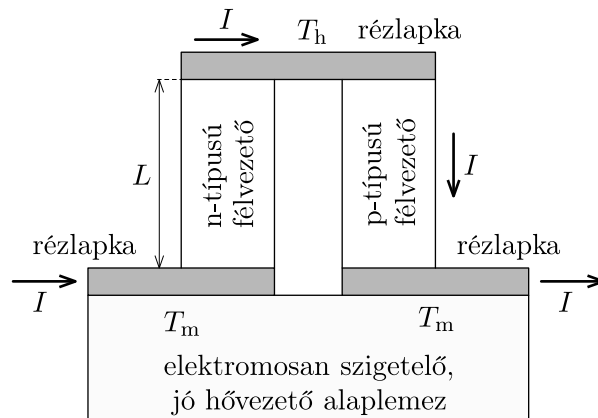
2. Peltier-elem (11 pont)

Ha két különböző anyagú (A és B) vezetőhuzal csatlakozási pontján I erősségű elektromos áram halad keresztül, akkor a kísérletek szerint a csatlakozásnál az áram irányától függően hő nyelődik el vagy hő szabadul fel. Ezt a jelenséget Peltier-effektusnak nevezik. Ha az áram az A vezetőből a B vezetőbe folyik, akkor a hőtermelődés teljesítményét a

$$P = (\alpha_A - \alpha_B)TI$$

összefüggés adja meg, ahol T a csatlakozási pont abszolút hőmérséklete, α_A és α_B pedig az A , illetve B anyagok ún. Seebeck-együtthatója.

A Peltier-effektus az *ábrán* látható eszköz segítségével hűtésre is használható. Ez az ún. Peltier-elem két különböző anyagú (n-típusú és p-típusú) félvezető hasákból áll, melyek hossza L , keresztmetszetük területe pedig A . A félvezető hasábok végeihez elhanyagolható elektromos ellenállású, nagyon jó hővezető rézlapkák csatlakoznak. Ha az eszközön I erősségű áram folyik át (az *ábrán* látható módon), akkor a felső rézlapkánál (a félvezető hasábokkal való érintkezésnél) hőelvonás történik, míg az alsó két rézlapkánál (melyek egy elektromosan szigetelő, de jó hővezető alaplemezhez csatlakoznak) hő szabadul fel. Ennek eredményeképpen a felső rézlapka lehűl, az eszköz alsó része pedig felmelegszik. Állandósult állapotban a felső rézlapka hőmérséklete T_h (hideg), míg az alsó rézlapkáké és az alaplemezé T_m (meleg). Ebben a feladatban a félvezető hasábok a réznél jóval nagyobb elektromos ellenállású vezetőknek tekintendők.



A következő részfeladatokban mindig feltételezhetjük, hogy a rézlapkák és a csatlakozási pontok ohmos ellenállása elhanyagolható. Tegyük fel azt is, hogy a Peltier-elem és a környezete közötti termikus kontaktus csak az alaplemezen keresztül valósul meg.

2.1. Adjuk meg a felső rézlapkánál a Peltier-effektus következtében történő hőelvonás P_h^{Peltier} teljesítményét a félvezető hasábok α_n és α_p Seebeck-együtthatói, a T_h hőmérséklet és az I áramerősség segítségével. (1,0 p)

A felső rézlapkánál bekövetkező hőelvonás eredő teljesítménye két ok miatt kisebb, mint az előbb kiszámított P_h^{Peltier} érték. Az egyik ok, hogy a λ hővezetési együtthatójú félvezető hasábok a hőt a meleg kontaktustól a hideg felé vezetik.

2.2. Határozzuk meg a két félvezető hasáb által időegység alatt a hideg kontaktushoz vezetett hő P_h^{Fourier} értékét (hővezetési teljesítményt)! (0,5 p)

A másik ok, ami csökkenti a felső rézlapkánál a hűtési teljesítményt, az a félvezető hasábokban keletkező Joule-hő.

2.3. Adjuk meg a félvezető hasábokban termelődő Joule-hő által a hideg rézlapkát melegítő P_h^{Joule} teljesítményt. Az n-típusú és p-típusú félvezetők fajlagos ellenállása rendre ρ_n és ρ_p . (1,0 p)

2.4. Mekkora U feszültség szükséges a Peltier-elem I erősségű árammal való működtetéséhez? *Útmutatás:* Alkalmazzuk az energiamegmaradás törvényét! (2,5 p)

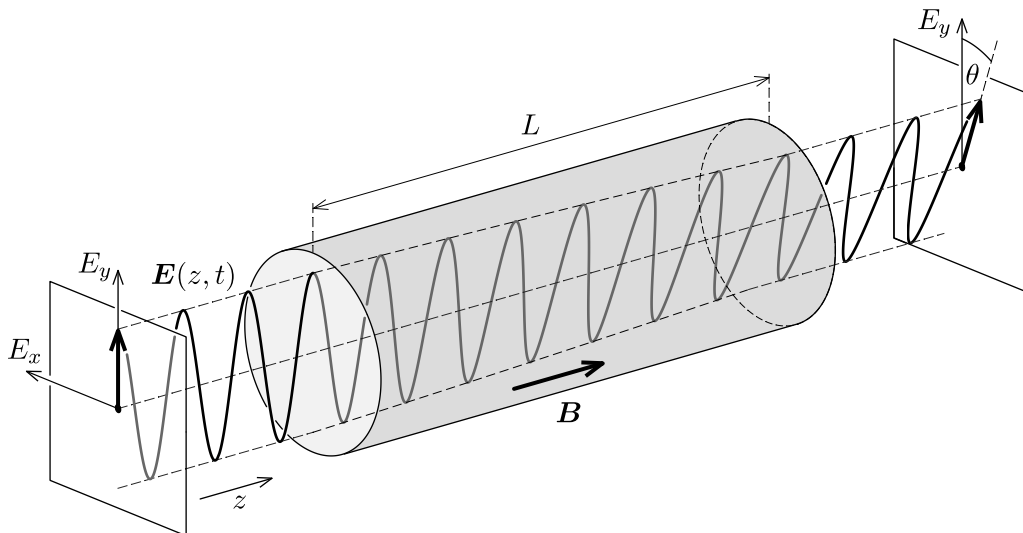
2.5. A **2.1.**, **2.2.** és **2.3.** részfeladatok eredményeinek segítségével a felső rézlapkánál létrejövő hőelvonás P_h^{teljes} eredő teljesítménye meghatározható. Ennek segítségével adjuk meg a felső rézlapka állandósult hőmérsékletét L , A , α_n , α_p , ρ_n , ρ_p , λ , I és T_m felhasználásával. (1,0 p)

2.6. Ha az alaplemez T_m hőmérsékletét állandó értéken tartjuk, a Peltier-elem hideg rézlapkájának T_h hőmérséklete függ az I áramerősségtől. Határozzuk meg azt az I^* áramerősséget, amely mellett a felső rézlapka állandósult hőmérséklete a lehető legkisebb! (2,5 p)

2.7. Határozzuk meg a T_h állandósult hőmérséklet lehetséges legkisebb értékét! A választ α_n , α_p , ρ_n , ρ_p , λ és T_m segítségével adjuk meg! (2,5 p)
A következő adatok felhasználásával adjuk meg a minimális hőmérséklet számszerű értékét is: $\rho_n = 2 \cdot 10^{-6} \Omega\text{m}$, $\rho_p = 4 \cdot 10^{-6} \Omega\text{m}$, $\lambda = 15 \text{ W}/(\text{m K})$, $\alpha_p - \alpha_n = 4 \cdot 10^{-4} \text{ V/K}$, $T_m = 300 \text{ K}$.

3. Faraday-effektus (9 pont)

Ha átlátszó szigetelő anyagot homogén mágneses mezőbe helyezünk, és az anyagon a mágneses indukcióvektorral azonos irányba haladó, lineárisan polarizált fénynyalábot bocsátunk keresztül, akkor a közegből kilépő fény továbbra is lineárisan polarizált marad, azonban polarizációjának iránya a B mágneses indukcióval arányos θ szögben elfordul (lásd az *ábrát*). Ebben a feladatban ennek az optikai forgatásnak (az ún. Faraday-effektusnak) a leírásával foglalkozunk.



Tekintsünk egy vákuumban elhelyezkedő, L hosszúságú, tömör szigetelő hengert, melynek szimmetriatengelye egybeesik a z tengellyel. Ha a henger egyik ($z = 0$ -nál elhelyezkedő) kör-lapjára egy y irányban lineárisan polarizált, z irányba terjedő, ω körfrekvenciájú fényhullámot ejtünk, akkor az a hengerbe belépve a $z = 0^+$ helyen (azaz a körlaphoz nagyon közel) az

$$(*) \quad E_x(t) = 0, \quad E_y(t) = E_0 \cos(\omega t),$$

télerősség-komponensekkel írható le, ahol E_0 pozitív konstans. Ez a hullám egyértelműen előál-lítható egy jobbra és egy balra cirkulárisan polarizált² fényhullám szuperpozíciójaként.

3.1. Bontsuk fel a fenti egyenletekkel megadott beeső fényhullámot kétféle cirkulárisan polarizált hullámra, és adjuk meg ezek $E_x^{\text{jobb}}(t)$ és $E_y^{\text{jobb}}(t)$, valamint $E_x^{\text{bal}}(t)$ és $E_y^{\text{bal}}(t)$ télerősség-komponenseit a $z = 0^+$ helyen. A választ E_0 és ω felhasználásával adjuk meg.

(1,0 p)

²A cirkuláris polarizáció azt jelenti, hogy a tér tetszőleges pontjában az elektromos télerősségvektor nagysága időben állandó, iránya pedig ω szögsebességgel forog a terjedési irányra merőleges síkban. A jobb- és balkezességet a télerősségvektor forgási iránya szabja meg.

A Faraday-effektus oka az ún. cirkuláris kettőtörés: a mágneses mező jelenlétében a jobbra, illetve balra cirkulárisan polarizált fényre vonatkozóan a szigetelő törésmutatója különböző, n_{jobb} és n_{bal} értékű.

3.2. Határozzuk meg, mekkora θ szöggel fordul el a beeső fényhullám polarizációs síkja, mielőtt átjut a szigetelőből készült hengeren. A választ L , n_{jobb} , n_{bal} és a fény vákuumbeli λ hullámhossza segítségével adjuk meg, a henger körlapjain történő esetleges visszaverődést hagyjuk figyelmen kívül!

(2,5 p)

Az n_{jobb} és n_{bal} törésmutatók közötti különbség megértéséhez a közeg atomjainak a fényvel és a homogén mágneses térrel való kölcsönhatását kell vizsgálnunk. A továbbiakban tegyük fel, hogy a szigetelő henger anyaga paramágneses³, azaz olyan atomokból áll, melyeknek van mágneses momentuma. Tekintsük az atom egy klasszikus modelljét, melyben az egymással nem kölcsönható, pontszerű elektronok a sokkal nagyobb tömegű mag körül körpályán keringenek. Az elektronok és az atommag spinjétől mindvégig tekintsünk el!

3.3. Adjuk meg az atom μ eredő mágneses momentumának és az elektronok eredő N perdületének hányadosát! A választ az e elemi töltéssel és az elektron m tömegével fejezzük ki!

(0,5 p)

3.4. Ha a paramágneses anyagban z irányú, B indukciójú mágneses mező is jelen van, akkor a közeg véletlenszerű orientációjú, μ mágneses momentumú atomjai elkezdenek a z tengely körül precesszálni. Határozzuk meg ennek a precesszióknak az ω_p szögsebességét! A mágneses indukció irányához képest milyen körüljárású ez a mozgás?

(1,5 p)

Most vegyük figyelembe, hogy a homogén mágneses téren kívül az anyagban a (*) összefüggéssel megadott, lineáris polarizációjú fényhullám is jelen van. A **3.4.** részfeladatban leírt precesszió miatt a fényhullám kétféle cirkulárisan polarizált összetevőjének térerősségvektora az atomokhoz képest $\omega \pm \omega_p$ nagyságú szögsebességgel forog. Laboratóriumban előállítható mágneses terek esetén ω_p sokkal kisebb a látható fény ω körfrekvenciájánál. Ismert továbbá, hogy $B = 0$ esetén a közeg törésmutatója (mind a jobbra, mind pedig a balra cirkulárisan poláros fényre nézve) $n(\lambda)$ függvény szerint függ a benne haladó fény vákuumbeli λ hullámhosszától.

3.5. Az eddigi eredmények felhasználásával adjuk meg a közeg optikai forgatását jellemző $\mathcal{V} = \theta/(LB)$ ún. Verdet-állandó értékét! Eredményünket a c fénysebesség, a fény vákuumbeli λ hullámhossza, valamint e , m és $dn/d\lambda$ felhasználásával adjuk meg!

(2,5 p)

3.6. A szigetelő henger után egy síktükröt helyezünk el a fény útjára merőlegesen, így a fényhullám még egyszer áthalad (ellenkező irányban) a közegen. Összesen mekkora szöggel fordul el a fény polarizációja? A választ a \mathcal{V} Verdet-állandóval, valamint B -vel és L -lel adjuk meg!

(1,0 p)

³A paramágnes olyan anyag, melynek relatív permeabilitása $\mu_r \approx 1$, miközben $\mu_r > 1$.