

## Fontos tudnivalók

- Az elméleti forduló időtartama 5 óra. A feladatok hibátlan megoldásával összesen 30 pontot lehet szerezni, a részpontszámok az egyes kérdéseknél zárójelben fel vannak tüntetve. Figyelem, a három feladat különböző összpontszámú!
- Minden feladatot más javító fog értékelni. Ezért fontos, hogy véletlenül se kerüljön két különböző feladat megoldása ugyanarra a papírra. Minden beadott lapra írd rá a nevedet!
- A részletes számolásokat a rendelkezésre álló üres lapokon végezd! Az egyéb (füzetből kitépett, négyzetrácsos stb.) papírra írt megoldásokat nem tudjuk értékelni. Lehetőleg minél kevesebb szöveget használj, megoldásaidat igyekezz főleg egyenletekkel, számokkal, szimbólumokkal és grafikonokkal kifejezni! Ha azt szeretnéd, hogy megoldásod egy része ne kerüljön értékelésre, tedd zárójelbe azt a részt, és egy vonallal húzd át! (Az áthúzott, de helyes megoldást nem tudjuk értékelni.)
- Az egyes részfeladatokra kapott végeredményeidet keretezd be vagy kétszer húzd alá!
- A verseny teljesen egyéni. A feladatok megoldásához író- és rajzeszközökön, valamint kétsoros (nem grafikus) számológépen kívül semmilyen segédeszköz (könyv, füzet, internet, számítógép, mobiltelefon stb.) nem használható.

# 1. Buborékok képződése és mozgása pezsgőben (12 pont)

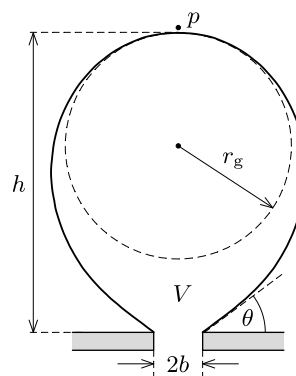
Szilveszteri koccintáskor megfigyelhetjük, hogy a pezsgőben buborékfonalak alakulnak ki, azaz a buborékok a pohár aljának vagy oldalfalának bizonyos pontjairól indulva libasorban emelkednek a felszín felé. A buborékok képződésének oka, hogy a pezsgő előállításakor az italt nagy (2-5 atmoszféra) nyomás alatt szén-dioxiddal telítik, ami légköri nyomáson túltelített oldatot eredményez, így a  $\text{CO}_2$  gáz formájában fokozatosan kiválik a folyadékból. Ez a kiválás a pohár belső falának miroszkopikus egyenetlenségeinél, szennyeződéseinél történik meg legnagyobb valószínűséggel, ezek az ún. nukleációs magvak. Ha egy buborékkezdemény már kialakult, akkor a gáz-folyadék határfelületen tovább folytatódik a  $\text{CO}_2$  kiválása egészen addig, amíg a buborék olyan nagyra hízik, hogy nagy része leválik a magról. Ekkor csak egy apró buborékkezdeményt hagy maga után, amely szintén növekedésnek indul.

Ebben a feladatban a buborékok leválásának és emelkedő mozgásának leírásával foglalkozunk egy olyan egyszerű modell segítségével, amely bizonyos feltételek mellett a részletes számolások és kísérletek szerint is jól közelíti a valóságot.

## 1.A. Buborékok képződése és leválása

Tegyük fel, hogy a pohár alján lévő egyik nukleációs mag egy kicsiny,  $b$  sugarú, kör alakú bemélyedés, amelyen *lassan* egy buborék fejlődik (1.1. ábra). Egy adott pillanatban a buborék térfogata  $V$ , magassága  $h$ , görbületi sugara a legfelső pontjában  $r_g$ , illeszkedési szöge a pohár aljához képest  $\theta$ . A folyadék nyomása közvetlenül a buborék tetejénél  $p$ .

A buborékra a folyadék hidrosztatikai nyomásától származó  $F_1$  erő, a bezárt  $\text{CO}_2$ -gáz nyomásából származó  $F_2$  erő, illetve a bemélyedésnél ható, felületi feszültségből származó  $F_3$  erő hat.



1.1. ábra

**1.A.1.** Fejezzük ki az  $F_1$  erőt a folyadék (pezsgő)  $\rho$  sűrűsége, a  $g$  nehézségi gyorsulás, valamint az 1.1. ábrán feltüntetett mennyiségek segítségével!

(1,0 p)

**1.A.2.** Fejezzük ki az  $F_2$  erőt a folyadék  $\sigma$  felületi feszültsége és az 1.1. ábrán látható mennyiségek segítségével!

(1,0 p)

**1.A.3.** Adjuk meg az  $F_3$  erőt a  $\sigma$  felületi feszültség és az 1.1. ábrán látható paraméterek segítségével!

(0,5 p)

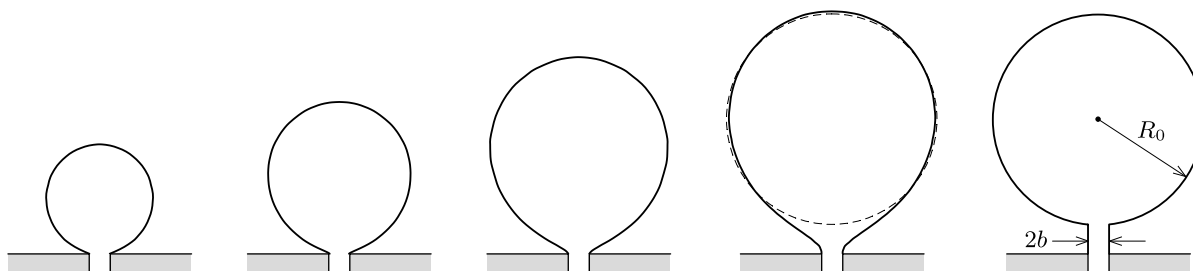
**1.A.4.** Az előző alkérdésekre kapott eredmények felhasználásával írjuk fel a buborék egyensúlyát kifejező egyenletet!

(0,5 p)

A buborék alakját a hidrosztatikai nyomásból és a felületi feszültségből származó erők együttesen határozzák meg. Ha a buborék mérete sokkal kisebb egy bizonyos  $\kappa$  hosszúságnál, akkor a buborék nagy része (egy vékony „nyaktól” eltekintve) jó közelítéssel gömb alakú marad még a nukleációs magról való leszakadáskor is, ahogy az az 1.2. ábra első négy rajzán látható.

**1.A.5.** Adjunk becslést  $\kappa$  értékére a pezsgő  $\rho$  sűrűsége, a  $g$  nehézségi gyorsulás és a  $\sigma$  feszültség segítségével! (Feltehetjük, hogy a  $\text{CO}_2$  gáz sűrűsége jóval kisebb a folyadék sűrűségénél.)

(1,0 p)



1.2. ábra

A továbbiakban tegyük fel, hogy a buborék mérete sokkal kisebb, mint  $\kappa$ ! Ekkor a buborék alakja a leválás pillanatában egy  $R_0$  sugarú gömbbel és a hozzá csatlakozó  $b$  sugarú, henger alakú, vékony ( $b \ll R_0$ ), rövid nyakkal modellezhető (lásd az 1.1. ábra utolsó rajzát).

**1.A.6.** Fejezzük ki a bemélyedés (és a buborék nyakának)  $b$  sugarát az éppen leváló buborék  $R_0$  sugara, valamint  $\rho$ ,  $g$  és  $\sigma$  segítségével! Használjuk fel, hogy  $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$ , ha  $|\varepsilon| \ll 1$ .

(2,0 p)

**1.A.7.** Számítsuk ki az éppen leváló buborék  $R_0$  sugarát, ha  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ,  $\sigma = 50 \text{ mN/m}$  és  $b = 0,5 \text{ }\mu\text{m}$ .

(1,0 p)

## 1.B. Buborékok felszálló mozgásának leírása

A buborék belsejében lévő szén-dioxid mennyisége a nukleációs magról történő leválás után tovább növekszik. Ennek üteme jó közelítéssel arányos a buborék falának  $A$  felszínével:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \gamma A,$$

ahol  $\gamma$  egy állandó,  $\Delta N$  pedig a kicsiny  $\Delta t$  idő alatt a folyadékból kiváló  $\text{CO}_2$ -molekulák száma.

A feladat következő részében tételezzük fel, hogy a pezsgő (és a benne lévő buborék) hőmérséklete mindvégig az ideális  $T = 15^\circ\text{C}$ , a buborék jó közelítéssel gömb alakú marad, a légköri nyomás értéke pedig  $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ .

**1.B.1.** Adjuk meg a buborék  $R(t)$  sugarát a leválás után  $t$  idő elteltével  $R_0$ ,  $\gamma$ ,  $T$ ,  $p_0$  és univerzális állandó(k) felhasználásával!

(1,0 p)

A felfelé mozgó buborékre a hidrosztatikai felhajtóerő és a  $v$  sebességgel arányos nagyságú ún. Stokes-féle közegellenállási erő hat:

$$F_{\text{Stokes}} = 6\pi R\eta v,$$

ahol  $R$  a buborék pillanatnyi sugara,  $\eta$  pedig a folyadék belső súrlódását jellemző ún. viszkozitás.

**1.B.2.** Adjuk meg a buborék  $v(t)$  sebességét a leválás után  $t$  idő elteltével  $R_0, \gamma, T, p_0, \varrho, g, \eta$  és univerzális állandó(k) felhasználásával! (1,5 p)

A pohárban  $H = 10$  cm magasan áll a pezsgő. A pohár aljáról induló buborék  $t_0 = 1,2$  s alatt éri el a felszínt. A pezsgő viszkozitása  $\eta = 1,6 \cdot 10^{-3}$  Pa · s. Ha az **1.A.7.** alkérdésben nem sikerült meghatározni a leváló buborék  $R_0$  sugarát, akkor azt vegyük  $R_0 = 0,16$  mm-nek!

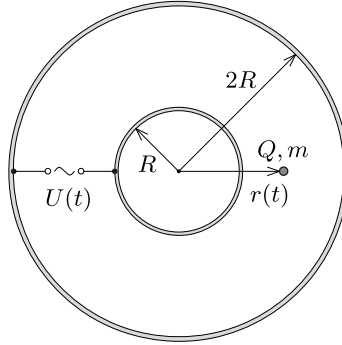
**1.B.3.** Mekkora a buborék  $R(t_0)$  sugara, amikor eléri a felszínt? Adjuk meg a sugár számszerű értékét is! (2,5 p)

*Matematikai segítség:* Szükségünk lehet a következő integrálra:

$$\int (a + bx)^n dx = \frac{(a + bx)^{n+1}}{b(n + 1)} + \text{konstans}.$$

## 2. Ponttöltés mozgása oszcilláló elektromos térben (10 pont)

Egy gömbkondenzátor két koncentrikus,  $R$  és  $2R$  sugarú, igen jól vezető fémgömbhéjből áll; a gömbök közötti térben vákuum van. A kondenzátor fegyverzetei közé egy váltóáramú feszültségforrást helyezünk, amit egy-egy sugárirányú, egyenes vezetékkel csatlakoztatunk a gömbökhöz (2.1. ábra). A gömbökre kapcsolt feszültség  $U(t) = U_0 \cos \omega t$  módon változik az idő függvényében.



2.1. ábra

**2.1.** Határozzuk meg a gömbkondenzátor kapacitását! A választ  $R$  és univerzális állandó(k) segítségével adjuk meg!

(0,5 p)

Ha a váltakozó feszültség körfrekvenciája nem túl magas, a kondenzátor feszültsége (az igen jól vezető gömbök miatt) „követi” a feszültségforrást, a fáziskésés lényegében zérus (ez a kváziszztatikus eset). Ha azonban a váltakozó feszültség  $\omega$  körfrekvenciája megközelít egy bizonyos  $\omega_1$  értéket, akkor a rendszer induktív ellenállása számottevő lesz, így a kváziszztatikus közelítés nem alkalmazható.

**2.2.** Adjunk nagyságrendi becslést  $\omega_1$  értékére, ha  $R = 10$  cm. Ismert továbbá, hogy a vákuum dielektromos állandója  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  C<sup>2</sup>/(Nm<sup>2</sup>), permeabilitása  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Vs/(Am).

(1,0 p)

A továbbiakban tegyük fel, hogy  $\omega \ll \omega_1$ ! A gömbök közötti térben, a feszültségforrással átellenes oldalon egy  $+Q$  töltésű,  $m$  tömegű kis porszem található. Feltételezhetjük, hogy a porszemre ható nehézségi erő hatása a feladat során végig elhanyagolható. Jelöljük a porszem gömbök középpontjától mért távolságát  $r$ -rel! Ha a váltakozó feszültség körfrekvenciája sokkal nagyobb egy bizonyos  $\omega_2$  értéknél, akkor a gyöngy mozgása felbontható egy lassú, sodródó mozgásra és egy akörül gyorsan oszcilláló, kis  $A(t)$  amplitúdójú rezgőmozgásra:

$$r(t) = r_0(t) + A(t) \cos \omega t,$$

ahol  $A(t) \ll r_0(t)$ , valamint  $A(t)$  és  $r_0(t)$  lassan változó függvények. Ez azt jelenti, hogy teljesülnek az  $\ddot{r}_0(t)$ ,  $\ddot{A}(t)$ ,  $\dot{A}(t)\omega \ll A(t)\omega^2$  relációk (a mennyiség fölé tett pont és kettőspont az első és második idő szerinti deriváltat jelöli).

**2.3.** Adjunk nagyságrendi becslést  $\omega_2$  értékére  $m$ ,  $Q$ ,  $R$  és  $U_0$  segítségével! Számítsuk ki  $\omega_2$  becsült értékét  $R = 10$  cm,  $m = 10^{-16}$  kg,  $Q = 1,6 \cdot 10^{-12}$  C,  $U_0 = 1,0$  V esetén! (1,0 p)

A következő feladatokban tegyük fel, hogy  $\omega_2 \ll \omega \ll \omega_1$ ! A porszem gyorsulása az

$$(2.1) \quad \ddot{r}(t) = \frac{\alpha}{r(t)^2} \cos \omega t$$

egyenlet szerint változik az idő függvényében, ahol  $\alpha$  állandó paraméter.

**2.4.** Fejezzük ki az  $\alpha$  paraméter értékét  $m$ ,  $Q$ ,  $R$  és  $U_0$  segítségével! (1,0 p)

**2.5.** Az említett közelítések segítségével adjuk meg a gyors oszcilláció  $A(t)$  amplitúdóját  $\alpha$ ,  $r_0(t)$  és  $\omega$  felhasználásával! (2,0 p)

A (2.1) egyenlet egy periódusidőre vett átlagolásával összefüggést állapíthatunk meg a porszem lassú, sodródó mozgását leíró  $r_0(t)$  függvény és annak  $\ddot{r}_0(t)$  gyorsulása között. A lassan változó mennyiségek –  $A(t)$  és  $r_0(t)$  – egy periódus alatt alig változnak, így az időátlagolás során állandónak vehetők.

**2.6.** Az eddig használt közelítéseket és a **2.5.** alkérdés eredményét felhasználva fejezzük ki a lassan sodródó mozgás  $\ddot{r}_0(t)$  gyorsulását  $r_0(t)$ ,  $\alpha$  és  $\omega$  segítségével! (2,5 p)

**2.7.** Feltételezve, hogy a  $t = 0$  időpillanatban a porszem a kisebb fémgömb felületének közeléből indult, határozzuk meg, mekkora sodródási sebességgel ér el a porszem a nagyobb gömbhöz! Az eredményt  $m$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $U_0$  és  $\omega$  segítségével adjuk meg! (1,5 p)

*Matematikai segítség:* Szükségünk lehet a következő integrálra:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{konstans}.$$

**2.8.** Adjuk meg a porszem sodródási sebességének számszerű értékét akkor, amikor eléri a nagy gömböt! Legyen  $\omega = 2 \cdot 10^5$  1/s,  $R = 10$  cm,  $m = 10^{-16}$  kg,  $Q = 1,6 \cdot 10^{-12}$  C,  $U_0 = 1,0$  V! (0,5 p)

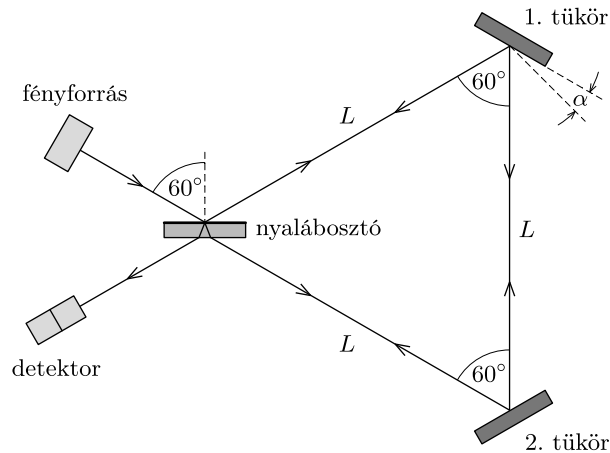
### 3. Száloptikás giroszkóp (8 pont)

A mechanikus giroszkóp a pörgettyű elvén működő eszköz, amelynek lelke egy olyan lendkerék, amelynek szimmetriatengelye a háromtengelyű felfüggesztésnek köszönhetően szabadon el tud fordulni. A felpörgetett kerék a perdületmegmaradás miatt a felfüggesztés mozgásakor is megőrzi eredeti forgástengelyét, így alkalmas irányok megtartására és szögsebességmérésre is.

A száloptikás giroszkóp csak a felhasználási módjában hasonlít a mechanikus giroszkópra, hiszen ez is alkalmas egy forgó koordináta-rendszer szögsebességének meghatározására. Az eszköz lényegében egy ún. Sagnac-féle interferométer száloptikás változata, amelyben az interferáló fényhullámok fáziskülönbsége függ a koordináta-rendszerrel együtt forgó eszköz szögsebességétől. Ez a feladat a száloptikás giroszkóp működési elvével foglalkozik.

#### 3.A. A Sagnac-féle interferométer

A Sagnac-féle interferométer egyik változatát a 3.1. ábra mutatja. Ez az eszköz két ideális síktükörből és egy nyálábosztóból áll, amelyek egy  $L$  oldalú szabályos háromszög alakjában vannak elrendezve. A nyálábosztóra  $60^\circ$ -os beesési szögben  $I_0$  intenzitású,  $\lambda$  hullámhosszúságú monokromatikus síkhullám esik a fényforrásból. A nyálábosztó egy dielektromos (szigetelő) anyagból készült vékony plánparallel lemez, amelynek felső lapja féligáteresztő tükröként viselkedik, azaz a rá eső fény intenzitásának felét visszaveri, másik felét pedig átengedi. A nyálábosztó alsó lapja egy vékony bevonatnak köszönhetően nem tükröző.



3.1. ábra

A nyálábosztón való áthaladás után a fény az óramutató járásával megegyező, és azzal ellentétes irányban is végigpattog a tükrökön, míg végül mindkét hullám újra a nyálábosztóhoz érkezik. Itt a hullámok ismét kettéválnak fele-fele intenzitásarányban, így a hullámok egy része a fényforrásba visszajutva egyesül, másik része pedig (egymással interferálva) a detektorba jut.

**3.A.1.** Az interferométer alaphelyzetében mekkora intenzitást mér a detektor és mekkora intenzitású fény jut vissza a fényforrásba?

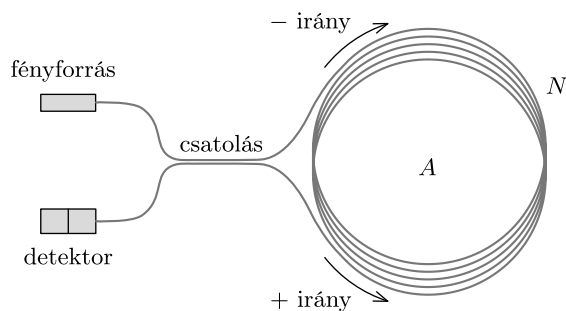
(1,0 p)

**3.A.2.** Az interferométer 1. tükrét kicsiny  $\alpha$  szöggel elforgatjuk a 3.1. ábrán látható módon. Változik-e, és ha igen, hogyan változik a detektor által mért intenzitás  $\alpha$  függvényében?

(2,0 p)

### 3.B. A száloptikás Sagnac-féle interferométer, mint giroszkóp

A 3.1. ábrán bemutatott interferométert optikai szálak segítségével is meg lehet valósítani, ahogy az a 3.2. ábrán látható. Az optikai szálak fényvezető magjának törésmutatójáról tételezzük fel, hogy 1-hez közeli érték. A használt fény hullámhossza  $\lambda$ , a fényforrásból kiinduló intenzitás a szálban  $I_0$ . Az egyenlő intenzitású nyalábosztást két optikai szál közötti csatolással valósítják meg: ha a két szál fényvezető magja elég közel helyezkedik el egymáshoz, az elektromágneses hullám „átcsatolódhat” az egyik szálból a másikba. Ha a csatoláshoz egy bejövő hullám érkezik, akkor a két továbbhaladó hullám egymáshoz viszonyított fáziskülönbsége  $\pi/2$  lesz. A fényforrás felől érkező nyaláb két fele az óramutató járásával azonos ( $-$ ), illetve azzal ellentétes ( $+$ ) irányban halad végig  $N$  darab, egyenként  $A$  területű hurkon, míg a csatoláson újra áthaladva a detektorba, valamint a fényforrásba jut.



3.2. ábra

Ha a 3.2. ábrán látható interferométert a kör alakú hurkok középpontja körül  $\Omega$  szögsebességgel megforgatjuk, akkor a  $+$  és  $-$  irányba haladó hullámok hullámhossza a Doppler-effektus miatt kicsit megváltozik. Így a detektor által mért intenzitás  $\Omega$  függvénye lesz.

**3.B.1.** Határozzuk meg a  $+$  és  $-$  irányba terjedő hullámok  $\phi$  fáziskülönbségét, amikor a detektorba érnek! A választ  $\lambda$ ,  $A$ ,  $N$  és  $\Omega$  univerzális állandó(k) segítségével adjuk meg!

(3,0 p)

**3.B.2.** Adjuk meg a detektor által mért intenzitást a  $+$  és  $-$  irányba terjedő hullámok  $\phi$  fáziskülönbsége és  $I_0$  segítségével!

(1,0 p)

**3.B.3.** Egy tipikus száloptikás giroszkópban 200 m hosszú optikai szál van feltekerve egy  $d = 10$  cm átmérőjű, függőleges tengelyű csévetestre. Mekkora fáziskülönbséget mérhetünk a két nyaláb között Budapesten a Föld forgása miatt? (Budapest földrajzi szélessége kb.  $47^\circ$ .)

(1,0 p)